令和5年度
前期日程

数　　学

教育学部［数学(ロ)］

医学部医学科

工学部

応用生物科学部［数学(ロ)］

問　題　冊　子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は5ページで，解答用紙は5枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問5題である。
5. **大問の配点比率は全て20％である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正四面体OABCがある。辺ABを1：2に内分する点をP，線分OPを$s:(1-s)$に内分する点をQとする。△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。以下の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QG}}$を$s$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いてそれぞれ表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QG}}$であるとき，$s$の値を求めよ。

(3) sを(2)で求めた値とするとき，△OQGの面積を求めよ。

(4) sを(2)で求めた値とするとき，$\tan(\angle\mathrm{OGQ}+\angle\mathrm{OPG})$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)a_n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，a_n は整数 p_n，q_n を用いて

$$a_n = p_n + \sqrt{2}\, q_n$$

と表せる。以下の問に答えよ。

(1) p_1，p_2，q_1，q_2 を求めよ。

(2) p_{n+1}，q_{n+1} を p_n と q_n を用いてそれぞれ表せ。

(3) $b_n = a_n - (2 + \sqrt{2})$ とする。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。また，b_n を n を用いて表せ。

(4) $c_n = p_n - \sqrt{2}\, q_n$ とする。c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(5) p_n，q_n を n を用いてそれぞれ表せ。

3 下図のように，縦２列，横３列に並んだ６つのマスがある。また，1，2，3，4，5，6の６個の数字がそれぞれ書かれたカードが１枚ずつある。すべてのカードを各マスに１枚ずつ置いていき，６つのマスに６枚のカードを並べる。上列の３つの数の積を a_1，下列の３つの数の積を a_2，左列の２つの数の積を b_1，中央列の２つの数の積を b_2，右列の２つの数の積を b_3 とする。以下の問に答えよ。

	左	中央	右
上			
下			

(1) a_1 が奇数となるような６枚のカードの並べ方は何通りあるか。

(2) a_1 が偶数となるような６枚のカードの並べ方は何通りあるか。

(3) b_1 が偶数となるような６枚のカードの並べ方は何通りあるか。

(4) a_1，a_2 がともに偶数となるような６枚のカードの並べ方は何通りあるか。

(5) a_1，a_2，b_1，b_2，b_3 がすべて偶数となるような６枚のカードの並べ方は何通りあるか。

4 $f(x) = xe^x$, $g(x) = x^2e^x$ とする。ただし，e は自然対数の底である。$f(x)$，$g(x)$ の第 n 次導関数をそれぞれ $f^{(n)}(x)$，$g^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) とする。以下の問に答えよ。

(1) $f^{(1)}(x)$，$f^{(2)}(x)$，$f^{(3)}(x)$ を求めよ。

(2) $f^{(n)}(x)$ を推測し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。また，曲線 $y = f^{(n)}(x)$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

(3) $g^{(n)}(x)$ は，実数 p_n，q_n を用いて $g^{(n)}(x) = (x^2 + p_nx + q_n)e^x$ と表せることを数学的帰納法を用いて示せ。

(4) $g^{(n)}(x)$ を求めよ。また，曲線 $y = g^{(n)}(x)$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

5 Oを原点とする複素数平面上で，$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$ となる点Aをとる。点AをOを中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点をBとする。このとき，正三角形となる△OABの頂点A，Bを表す複素数をそれぞれ α，β とする。また，辺ABの中点をM，△OABの重心をGとする。以下の問に答えよ。

(1) 点Mと点Gを表す複素数を，それぞれ α，β を用いて表せ。

(2) β を α を用いて表せ。

(3) 点Gを表す複素数の実部が正，虚部が $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるとき，$\alpha+\beta$ の虚部を求めよ。さらに，$\alpha+\beta$ の実部を求めよ。