令 和 3 年 度

前 期 日 程

数　　学

教育学部［数学(ロ)］

医学部医学科

工学部

問　題　冊　子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は5ページで，解答用紙は5枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問5題である。
5. **大問の配点比率は全て20％である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 空間の4点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ を頂点とする四面体 OABC の体積を V とする。辺 BC の中点を M，辺 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を P，辺 AC を $u : (1-u)$ に内分する点を Q，四面体 OMPQ の体積を V' とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

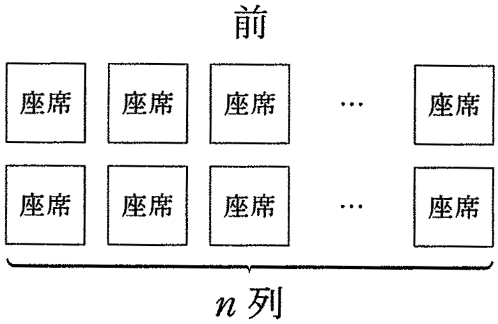
(2) $\triangle\mathrm{APQ}$，$\triangle\mathrm{BPM}$，$\triangle\mathrm{CQM}$ の面積を，それぞれ t，u を用いて表せ。

(3) $\dfrac{V'}{V}$ を t，u を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であるとき，t を u を用いて表せ。

(5) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であるように点 P，Q がそれぞれ辺 AB，AC 上を動くとき，$\dfrac{V'}{V}$ の最大値を求めよ。

2 下図のように，縦 2 列，横 n 列に並んだ合計 $2n$ 席の座席があり，その中から k 席の座席を選ぶ。ただし，選んだ座席の前後左右に隣接する座席は選ばないこととする。以下の問に答えよ。



(1) $k = n$ のとき，座席の選び方は何通りあるか。

(2) $n \geqq 3$，$k = n - 1$ とする。右端から 2 列目の前後 2 席がどちらも選ばれていないような，座席の選び方は何通りあるか。

(3) $n \geqq 3$，$k = n - 1$ のとき，座席の選び方は何通りあるか。

(4) $n \geqq 5$，$k = n - 2$ のとき，座席の選び方は何通りあるか。

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = 4 - \frac{4}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = na_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。以下の問に答えよ。

(1) b_1，b_2，b_3，b_4 を求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(5) 数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a_1$，$c_2 = a_1a_2$，$c_3 = a_1a_2a_3$，以下 $c_n = a_1a_2\cdots a_n$ $(n = 4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$ で定める。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めよ。

4 $r > 0$ とする。関数

$$f(x) = \sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(x) = r\cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。また，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を S で表す。以下の問に答えよ。

(1) 面積 S を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における，ただひとつの共有点 P をもつような r の値の範囲を求めよ。また，共有点 P の x 座標を t として，r を t を用いて表せ。

(3) r が (2) で定めた範囲内の値をとるとし，曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積を T で表す。T を r を用いて表せ。

(4) r が (2) で定めた範囲内の値をとるとし，T を (3) で定めた面積とする。$\dfrac{S}{T} = 4$ のとき，r の値を求めよ。また，そのときの (2) の共有点 P の座標を求めよ。

(5) r を (4) で定めた値とする。曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

5 nを2以上の自然数とする。関数

$$f(x) = x^n e^{-x} \quad (x \geqq 0)$$

$$g(x) = e^{x-n} - \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x \geqq 0)$$

を考える。以下の問に答えよ。ただしeは自然対数の底である。

(1) $f'(x)$を求めよ。

(2) 関数$f(x)$の最大値，およびそのときのxの値を求めよ。

(3) $\dfrac{g(x)}{e^x n^{-n}} \geqq 0$が成り立つことを示せ。

(4) x軸，直線$x = n + 1$，および曲線$y = g(x)$で囲まれる部分の面積S_nを求めよ。

(5)

$$\frac{1}{n+1} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。