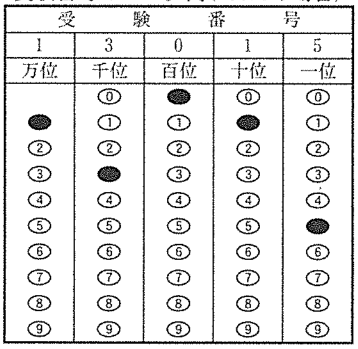
2021 M

数　学

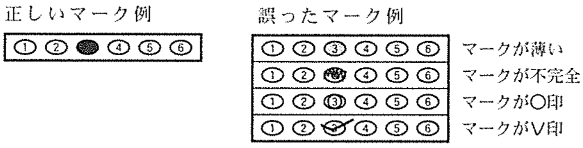
［注意事項］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

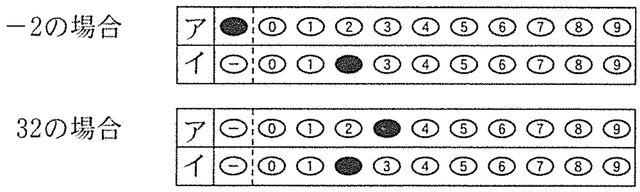
受験番号のマーク例(13015の場合)



5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HB または B の黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。



7. マークで解答する場合，$\boxed{}$ の中の文字は，それぞれ符号(－)または，数字 1 文字が対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－9 から－1 の整数または 10 から 99 の整数が入り得る。



8. 分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えること。
9. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) 複素数平面上に2点 $z_1 = \dfrac{3}{2} + 2i$, $z_2 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}i$ がある。

(a) $|z_1| = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，z_1 の偏角を $\alpha\ (0 \leqq \alpha < 2\pi)$ とすると $\sin\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(b) 点 z_2 を原点を中心として $-\alpha$ だけ回転した点を表す複素数を z_3 とすると $z_3 = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} + \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}i$ である。

(c) 点 z_2 を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を表す複素数を z_4 とすると $z_4 = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} + \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}i$ である。

(d) 複素数平面上で2点 z_3, z_4 からの距離の比が1：2になる点の全体は点 $\boxed{\text{セ}} + \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}i$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ の円である。

(2)

(a) $a \geqq 0$ とする。$\int_0^a (x^3 - a^2 x)\,dx = a^q \int_0^1 (x^3 - x)\,dx = pa^q$ となる。

ここで $p = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$q = \boxed{\text{エ}}$ である。

$a = \boxed{\text{オ}}$ のとき $\left|\int_0^a x(x^2 - a^2)\,dx\right| = 4$ となる。

(b) 曲線 $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$ の変曲点は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ である。この変曲点を通って $y = f(x)$ と 3 点で交わる直線で，その直線と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積が 8 となるものを考える。

3 つの交点のうちで x 座標が最も大きい交点の x 座標は $\boxed{\text{ク}}$ なので，求める直線の方程式は

$$y = \frac{f\left(\boxed{\text{ク}}\right) - f\left(\boxed{\text{カ}}\right)}{\left(\boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{カ}}\right)}\left(x - \boxed{\text{カ}}\right) + \boxed{\text{キ}}$$

$$= \boxed{\text{ケ}}\,x + \boxed{\text{コ}}$$

である。

(3)

(a)　$2n+1$ 個の整数からなるデータ，$-n$，$-n+1$，…，0，1，…，n がある。このデータの分散は $\frac{56}{3}$ であった。このとき $n=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(b)　(a)の $2n+1$ 個のデータから3個のデータ $a_1 < a_2 < a_3$ を選んだ。この3個のデータの平均値は1，分散は $\frac{26}{3}$ であった。このとき a_3 は $\boxed{\text{イ}}$ ，または $\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$ とする。

(c)　(b)の2組の3個のデータのうち，$\boxed{\text{ウ}}$ を含む組の3個のデータを(a)のデータから取り除いたとき，残りの $2n-2$ 個のデータの平均値は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，分散は $\dfrac{\boxed{\text{キクケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ となる。

(4) 連立不等式 $-2 \leqq x \leqq 2$，$-2 \leqq y \leqq 2$ の表す領域を D とする。

(a) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$2x^2+y^2+3x-2y+1$ のとる値の最大値は $\boxed{\text{アイ}}$，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(b) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x^2-4xy+4y^2+2x+y+1$ のとる値の最大値は $\boxed{\text{カキ}}$，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{クケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(a) 1辺の長さが1の正五角形 ABCDE について考える。(下図)

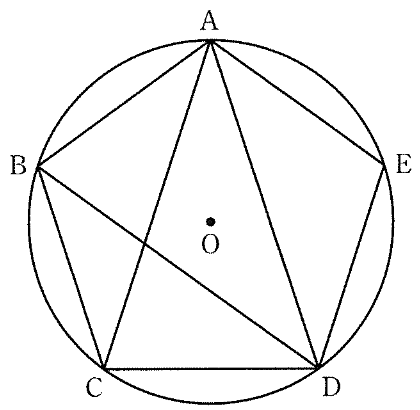
対角線 AC の長さは $\dfrac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ である。

$\sin^2\angle BAC = \dfrac{\boxed{エ}-\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ なので，この正五角形の外接円の半径を r とおくと，$r^2 = \dfrac{\boxed{キ}+\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケコ}}$ である。また，この正五角形の面積を S とすると，$S^2 = \dfrac{\boxed{サシ}+\boxed{スセ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タチ}}$ である。

(b) (a)の外接円の中心を O とおく。(a)の正五角形を底面とし，すべての辺の長さが1である五角錐を考える。頂点を F とおく。この底面に対する高さを h とすると，$h^2 = \dfrac{\boxed{ツ}-\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{トナ}}$ となる。$\angle AFO = \theta$ とおくと，

$\sin 2\theta = \dfrac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$ である。

(c) (b)の F を1辺の長さが1である正二十面体の頂点の一つとすると，点 A，B，C，D，E は F と辺でつながる正二十面体上の頂点と考えることができる。この二十面体の外接球の半径を R とおくと $R^2 = \dfrac{\boxed{ノ}+\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$ である。



Ⅲ ある素数 p，および互いに異なる整数 x，y に対して p^n が $x-y$ を割り切るような整数 n のうちで最大のものを $n_p(x-y)$ と表し，

$$d_p(x,\ y)=p^{-n_p(x-y)}$$

と定義する。また，$d_p(x,\ x)=0$ とする。

(1) $d_3(945,\ 378)$ を求めよ。

(2) すべての自然数 m と整数 x について $d_p(mx,\ 0)\leqq d_p(x,\ 0)$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての整数 x，y，z について $d_p(x,\ z)\leqq d_p(x,\ y)+d_p(y,\ z)$ が成り立つことを示せ。