入　学　試　験　問　題（1次）

数　　　学

令和3年1月25日　　　　9時00分―10時20分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。

2　この問題冊子は表紙・白紙を除き9ページである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。

3　解答には必ず黒鉛筆（またはシャープペンシル）を使用すること。

4　解答は，各設問ごとに一つだけ選び，解答用紙の所定の解答欄の該当する記号を塗りつぶすこと。

5　解答を訂正する場合は，消しゴムできれいに消すこと。

6　監督員の指示に従って，問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入し，解答用紙の指定欄に受験番号，受験番号のマーク，氏名を記入すること。

7　この問題冊子の余白は，草稿用に使用してよい。ただし，切り離してはならない。

8　解答用紙およびこの問題冊子は，持ち帰ってはならない。

受験番号					

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

設問ごとに，与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つ選べ。

1 $A = x^3 - 2a^2x + 4a^3$，$B = x + 2a$ を x についての整式とみて，A を B で割った余りを求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

2 方程式 $(\log_{10} x - \log_{10} 2)(\log_{10} x - \log_{10} 4) = 1$ は異なる2つの実数解 α，β をもつ。$\alpha\beta$ の値を求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

3 n を2以上の自然数とする。n と $n^2 - 2n + 3$ がどちらも素数となるときのすべての n の和を S とする。$\dfrac{S}{2}$ の値を求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

4 自然数 x, y, z は $x+2y+3z=10$ を満たすとする。
$x+y+z$ の最大値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

5 異なる3つの複素数 $\alpha=xi$, $\beta=4+3i$, $\gamma=2+2i$ $(i^2=-1)$ (x は実数)が複素数平面上で表す点を，それぞれ A，B，C とする。3点 A，B，C が同一直線上にあるとき，x の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

6 $x^2+y^2=10$, $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$ であるとき，
$|x\cos\alpha-y\sin\alpha|$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

7 座標平面上において点 $\mathrm{A}(t, 1)$ (t は正の実数) と原点 O を結ぶ線分 OA の垂直二等分線を直線 ℓ とする。線分 OA と直線 ℓ の交点を B，直線 ℓ と x 軸の交点を C とする。△OBC の面積が 1 であるとき，t の値は異なる実数 α，β となる。$\alpha+\beta$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

8 円 $C : x^2+y^2=25$ について考える。円 C と x 軸との 2 つの交点を $\mathrm{A}(5, 0)$，$\mathrm{B}(-5, 0)$ とし，円 C 上を動く点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする (x，y ともに正の実数)。
△ABP の内接円の面積が円 C の面積の $\dfrac{1}{16}$ になるとする。
△ABP の面積を S とするとき，$\dfrac{8\sqrt{S}}{5}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

9 方程式 $\cos^2 x + a\sin x + a - 2 = 0$ (a は実数) は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で解をもつとする。このとき，a のとりうる値の範囲は，$m \leqq a \leqq M$ となる。
$\dfrac{(2M+m)^2}{2}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

10 A，B，C，D の 4 つの袋の中に白球，赤球が入っている(袋 A(白球 4 個，赤球 1 個)，袋 B(白球 3 個，赤球 1 個)，袋 C(白球 2 個，赤球 1 個)，袋 D(白球 1 個，赤球 1 個))。これら A，B，C，D の袋からそれぞれ 1 個の球を取り出すとき，2 個以上が赤球である確率を P とする。$\dfrac{23}{12P}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

11 n は自然数とする。実数 $\left(\dfrac{3n+1}{25e}\right)^{\frac{6n+2}{7}}$ を最小とする n を k としたとき，$\dfrac{k}{4}$ の値を求めよ。e は自然対数の底を表すものとする。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

12 楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について考える。点 A$(1,\ t)$ $(t > 1$，t は実数$)$ から楕円 C に異なる 2 本の接線を引くことにする。楕円 C と 2 本の接線との接点の座標をそれぞれ，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とする。
$|y_1 - y_2|$ が最大となるとき，$4t^2$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

13 実数 x，y が $x \geqq \dfrac{1}{27}$，$y \geqq 3$，$xy = 27$ であるとき，
$(\log_3 x)^2(1 - 4\log_3 y - 3\log_3 x) - 8\log_3 x \cdot \log_3 y$ の最大値を M，最小値を m とする。$\dfrac{M-m}{40}$ の値を求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

14 関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$（a，b は実数，$0 < a < 1$）は，$-1 \leqq x \leqq 2$（x は実数）において，最大値 6，最小値 0 をとるものとする。
このときの $\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

15 $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{2 + \sin x}\,dx$ とする。$\dfrac{6e^S}{e}$ の値を求めよ。e は自然対数の底を表すものとする。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

次の文章を読み，以下の問い(問題$\boxed{16}$～$\boxed{18}$)に対する選択肢から最も適当なものを一つ選べ。

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，方程式 E：$\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ が成立しているとする。

I　このとき，$\sin x + \cos x$ は $\boxed{16}$ となり，$\sin x \cos x$ は $\boxed{17}$ となる。

$\boxed{16}$

㋐ $\dfrac{1}{4}$　㋕ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　㋚ $\dfrac{1}{2}$　㋟ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　㋤ 1

㋩ $\sqrt{2}$　㋮ 2　㋳ $2\sqrt{2}$　㋶ 4　㋻ $4\sqrt{2}$

$\boxed{17}$

㋐ $\dfrac{1}{4}$　㋕ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　㋚ $\dfrac{1}{2}$　㋟ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　㋤ 1

㋩ $\sqrt{2}$　㋮ 2　㋳ $2\sqrt{2}$　㋶ 4　㋻ $4\sqrt{2}$

II　したがって，$x = \boxed{18}$ が方程式 E の解である。

$\boxed{18}$

㋐ 0　㋕ $\dfrac{\pi}{20}$　㋚ $\dfrac{\pi}{15}$　㋟ $\dfrac{\pi}{10}$　㋤ $\dfrac{\pi}{8}$

㋩ $\dfrac{\pi}{7}$　㋮ $\dfrac{\pi}{6}$　㋳ $\dfrac{\pi}{5}$　㋶ $\dfrac{\pi}{4}$　㋻ $\dfrac{\pi}{3}$

次の文章を読み，以下の問い(問題$\boxed{19}$～$\boxed{22}$)に対する選択肢から最も適当なものを一つ選べ。

1辺の長さが2の正四面体OABCについて考える(△ABCを底面とする)。△ABCの辺ABの中点をD，辺ACの中点をE，辺BCを1：2，2：1に内分する点をそれぞれF，Gとし，半直線DFと半直線EGの交点をHとする。

I　$\overrightarrow{DF}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$で表すと，$\overrightarrow{DF}=\dfrac{-3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OC}}{6}$となる。このとき，$x=\boxed{19}$である。

$\boxed{19}$

㋐　1	㋕　2	㋚　3	㋟　4	㋤　5
㋩　-1	㋮　-2	㋳　-3	㋶　-4	㋻　-5

II　$\overrightarrow{EG}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$で表すと，$\overrightarrow{EG}=\dfrac{-3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}}{6}$となる。このとき，$y=\boxed{20}$である。

$\boxed{20}$

㋐　1	㋕　2	㋚　3	㋟　4	㋤　5
㋩　-1	㋮　-2	㋳　-3	㋶　-4	㋻　-5

III　$\overrightarrow{OH}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$で表すと，$\overrightarrow{OH}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$($p$，$q$，$r$は整数)となる。このとき，$p^2+q^2+r^2$の値は$\boxed{21}$である。

$\boxed{21}$

㋐　0	㋕　1	㋚　2	㋟　3	㋤　4
㋩　5	㋮　6	㋳　7	㋶　8	㋻　9

Ⅳ　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}$ の値は，$\boxed{22}$ である。

$\boxed{22}$

㋐　0	㋕　1	㋚　2	㋟　3	㋤　4
㋩　5	㋮　6	㋳　7	㋶　8	㋻　9

次の文章を読み，以下の問い(問題 $\boxed{23}$ ～ $\boxed{25}$ に対する選択肢から最も適当なものを一つ選べ。

数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = (-1)^{n+1}n^2$ (n は自然数)で与えられる。

数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

Ⅰ　S_6 の値は $\boxed{23}$ となる。

$\boxed{23}$

㋐　12	㋕　15	㋚　18	㋟　21	㋤　24
㋩　−12	㋮　−15	㋳　−18	㋶　−21	㋻　−24

Ⅱ　$\dfrac{S_{101}}{1717}$ の値は $\boxed{24}$ となる。

$\boxed{24}$

㋐　1	㋕　2	㋚　3	㋟　4	㋤　5
㋩　−1	㋮　−2	㋳　−3	㋶　−4	㋻　−5

Ⅲ　$a_n + 2S_n = -4656$ となるときの n の値を k とする。

k の値は $\boxed{25}$ となる。

$\boxed{25}$

㋐ 34	㋕ 35	㋚ 36	㋟ 37	㋤ 38
㋩ 44	㋮ 45	㋳ 46	㋶ 47	㋻ 48