令和４年度　入学試験問題（一般入試）

数　　　学

10：20 ～ 12：00

注　意

1. 問題冊子は10ページ，解答紙は３枚である。問題冊子は，指示があるまで開かないこと。

2. 解答開始前に，試験監督者の指示にしたがって，すべての解答紙それぞれ２ヶ所に受験番号を記入すること。

3. 「始め」の合図があったら，問題冊子のページ数を確認すること。

4. 解答は，黒色鉛筆（シャープペンシルも可）を使用し，すべて所定の欄に記入すること。欄外および裏面には記入しないこと。

5. 大問 $\boxed{4}$ は解答に至る流れがわかるように導出も記述すること。ただし，途中の式変形などは適宜省略すること。

6. 下書き等は，問題冊子の余白を利用すること。

7. 試験終了後，監督者の指示にしたがって，解答紙の順番をそろえること。

8. 解答紙は持ち帰らないこと。

1 空欄にあてはまる適切な数を指示された有効数字桁で求め，解答紙の所定の欄に記入しなさい。

出血して血圧が下がってしまっている（出血性ショック）状態の患者さんにノルアドレナリンという昇圧剤（血管を収縮させて血圧を上昇させる薬剤）を使用するとき，「ガンマ」という単位を使用する。1ガンマとは体重（1 kg）当たりの投与量と時間（1分）当たりの投与量を掛け合わせた単位で，1ガンマ = 1 μg/kg/分である。たとえば，体重50 kgの患者さんに1時間だけノルアドレナリンを1.5 mg投与する場合は，0.5ガンマである。

$1\,\mathrm{kg} = 10^3\,\mathrm{g} = 10^6\,\mathrm{mg} = 10^9\,\mu\mathrm{g}$，1時間 = 60分 = 3600秒である。

体重80 kgの患者さんにノルアドレナリンを5時間に7.2 mg投与したい。

- このとき，$\boxed{\text{ア}}$ ガンマ投与，と指示すればよい［有効数字1桁］。
- 手元には3 g/Lのノルアドレナリン溶液がある。使用するノルアドレナリン溶液の量は $\boxed{\text{イ}}$ mLである［有効数字2桁］。
- ノルアドレナリン溶液 $\boxed{\text{イ}}$ mLに生理食塩水を混ぜて計100 mLに調整する。この調整した輸液を，$\boxed{\text{ウ}}$ 滴で1 mL投与される輸液セットを使って点滴により投与する場合，9秒間に1滴，と指示すればよい［有効数字1桁］。

（計算用余白）

2 空欄にあてはまる適切な数，式，記号などを解答紙の所定の欄に記入しなさい。

- 甲は1〜9から4つの異なる数字を用意し数字列をつくる。それを乙が当てるゲームをする。乙は数字列を質問する。言われた数字列のうち，甲は，順番があっている数字の個数をH，順番は違っているが含まれている場合はBで答える。たとえば，甲が1234という数字列を用意し，乙の質問が4283であったとき，2は順番もあっているので1H，4と3は含まれているが順番は違うので2B，したがって甲は1H2Bと答える。また，乙の質問が2597であるときは甲の答えは0H1Bである。乙の3回の質問に対する甲の答えが次のようなとき甲の用意した数字列は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(1) 乙の質問3625：甲の答え1H1B

(2) 乙の質問1587：甲の答え1H1B

(3) 乙の質問1965：甲の答え1H3B

- 半径 a の円の円周上に固定された点Aと動く点Pがある。弦APの長さを L とする。円の中心をOとして，$\angle \mathrm{AOP} = \phi$ とする。また，点Pでの円の接線と直線APがなす角度を θ とする $(0 < \theta < \pi/2)$。点Pが円周上を $0 < \phi < \pi$ の範囲で動くとき，$f = L^3 \cos\theta$ が最大になるときの $\cos\phi$ は $\boxed{\text{オ}}$ である。

- 半径1の円に内接する三角形を考える。3辺のうち1辺の長さが1で三角形内部に円の中心を含むとき，この三角形の最も小さな角の大きさは $\boxed{\text{カ}}$ 度になる。

- $x-y$ 平面を考える。原点を通り，二次曲線 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ で囲まれる面積を二等分する直線の式は $y = \boxed{\text{キ}}$ である。

- $x-y$ 平面を考える。二次曲線 $y = ax^2 + bx + c$ を考える。ここで，a，b，c は定数で，$ac > 0$ とする。この二次曲線の接線と x 軸，y 軸で作られる直角三角形の面積が最小となるとき，その接線の式は $y = \boxed{\text{ク}}$ となる。

（計算用余白）

- 不定積分 $\int \left(2\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ は，$\boxed{\text{ケ}}$ となる。ただし，積分定数を C とする。

- $1 = \dfrac{6\left(1-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x-1}$ を解くと，$x = \boxed{\text{コ}}$ となる。

- $x-y$ 平面を考える。原点を中心とする半径 1 の円 $(x^2 + y^2 = 1)$ に引いた 2 本の接線の接点を A，B とする。2 本の接線は常に直交するとする。接点 A，B が円上を動くとき，接線の交点がえがく軌跡の式は $\boxed{\text{サ}}$ となる。

- 八角形の 8 個の頂点を A，B，...，H とする。A，B，...，H の 8 個の文字が書かれたルーレットを回し，出た文字の頂点に印をつける。合計 3 回ルーレットを回した後，印のついた頂点が三角形になる確率は $\boxed{\text{シ}}$ である。

- 平面上に原点 O を含む四角形 OABC がある。点 O，A，B，C から 3 点を選び，三角形を作り，その重心を G とおく。この重心 G と残りの 1 点を結ぶ線分を $m : n$ に内分する点を P とする。ここで，m，n は正の整数である。$m : n = \boxed{\text{ス}}$ とすれば，どの組み合わせの 3 点を選んでも点 P の位置が同じになる。

（計算用余白）

3 空欄にあてはまる適切な数，式，記号などを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。角度の単位はラジアンとする。

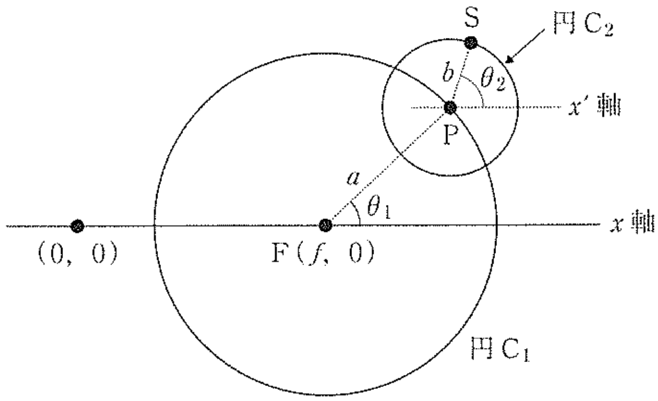

図 1

図 1 に示すように，$x-y$ 平面座標において x 軸上の点 F(f, 0) を中心とする半径 a の円 C_1 を考える。円 C_1 上にある点 P を考える。線分 FP が x 軸となす角度を x 軸から反時計回りに測ったときの値を θ_1 と置く。点 P を中心とする半径 b の円 C_2 を考える。円 C_2 上のある点 S を考える。点 P を通り，x 軸に平行な線を x' 軸と呼ぶ。線分 PS が x' 軸となす角度を，x' 軸から反時計回りに測ったときの値を θ_2 とおく。

- 点 P の座標 $(x_1,\ y_1)$ は a, f, θ_1 を用いて，$(x_1,\ y_1) = ($ $\boxed{\text{セ}}$ $)$ と表される。
- 点 S の座標 $(x_2,\ y_2)$ は a, b, f, θ_1, θ_2 を用いて，$(x_2,\ y_2) = ($ $\boxed{\text{ソ}}$ $)$ と表される。

媒介変数 t を用いて，θ_1 を式 $\theta_1 = \omega_1 t$ と表す。ここで，ω_1 は定数で，$\omega_1 > 0$ とする。同様に，θ_2 は式 $\theta_2 = \omega_2 t + \phi$ と表す。ここで，ω_2 と ϕ は定数で，$0 \leqq \phi < 2\pi$ とする。$t \geqq 0$ とし，t の初期値 $t = 0$ からの増加にともない点 P と点 S がそれぞれ円 C_1，円 C_2 上を周回することを考える。点 P が円 C_1 上を 1 周するときの t の変化量を，点 P の周期 T_P と呼ぶ。

- T_P の値は ω_1 を使って，$\boxed{\text{タ}}$ と表わされる。
- $T_P = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $f = 5$ とする。点 P と原点の距離を A，点 S と原点の距離を B とし，A, B を媒介変数 t に対して表示すると図 2 のようになった。ここで，実線が A，破線が B を表す。また，$t = 0$ と $t = 1$ で $|A - B| = 1$ となった。以上のことから，ω_2 の値は $\boxed{\text{チ}}$ ，ϕ の値は $\boxed{\text{ツ}}$ と求められる。
- $a > b$ とする。点 S の軌跡が半径 $a - b$ の円になるためには，ω_2 の値は ω_1 の $\boxed{\text{テ}}$ 倍，ϕ の値は $\boxed{\text{ト}}$ であればよい。
- 点 S の軌跡が半径 $a + b$ の円になるためには，ω_2 の値は ω_1 の $\boxed{\text{ナ}}$ 倍，ϕ の値は $\boxed{\text{ニ}}$ であればよい。

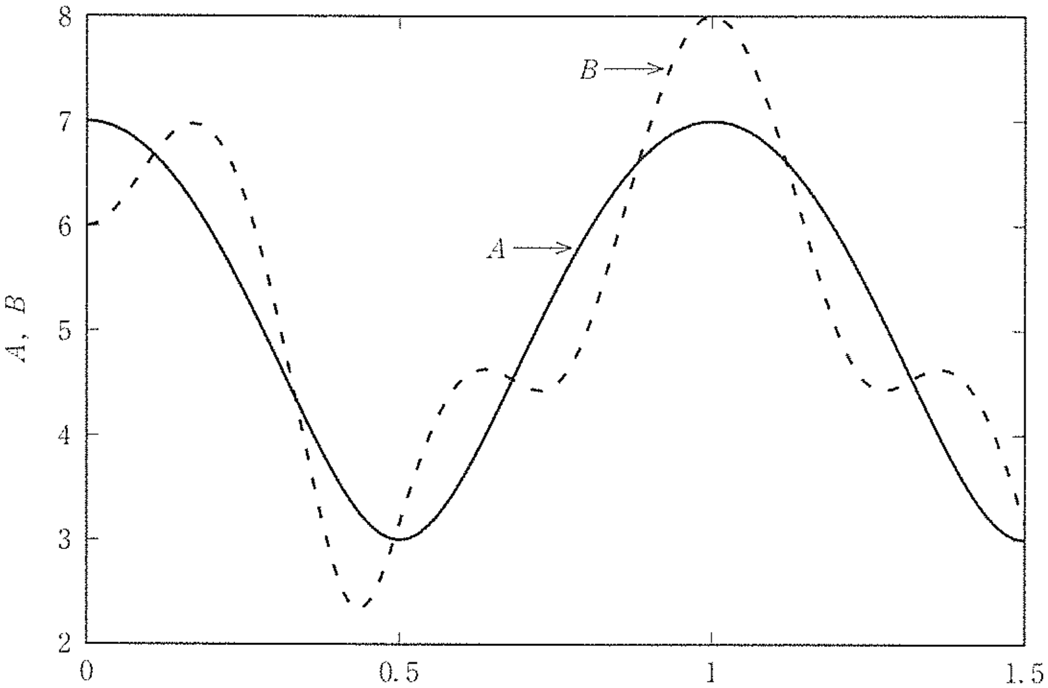

図2

- 点Pが1周する間に点Sが必ず点$(f-a-b,\ 0)$と点$(f+a-b,\ 0)$の両方を通過するための必要十分条件は，ω_2とω_1の間に自然数kを用いて表わされる$\omega_2=$ $\boxed{\text{ヌ}}$ という関係が成り立ち，ϕの値が $\boxed{\text{ネ}}$ であることである。

- $t=0$において，点Sの位置は$(f+a-b,\ 0)$であった。そこから点Pが1周したとき，すなわち$t=T_P$において，点Sの位置は$(f+a+b,\ 0)$であった。さらに点Pが1周したとき，すなわち$t=2T_P$において，点Sの位置は$(f+a-b,\ 0)$であった。このように点Pの周回ごとに点Sの位置が$(f+a-b,\ 0)$と$(f+a+b,\ 0)$を交互にとるための必要十分条件は，ω_2とω_1の間に自然数kを用いて表わされる$\omega_2=$ $\boxed{\text{ノ}}$ という関係が成り立ち，ϕの値が $\boxed{\text{ハ}}$ であることである。

点F，点P，点Sの3点が一直線上に並び，かつ点Fと点Pの間に点Sがある状態を「蝕(しょく)」と呼ぶことにする。zを2以上の自然数とする。

- $\omega_2=z\,\omega_1$の関係があるとき，点Pが円C_1上を1周する間に蝕が起こる回数は $\boxed{\text{ヒ}}$ 回である。

- $\omega_2=-z\,\omega_1$の関係があるとき，点Pが円C_1上を1周する間に蝕が起こる回数は $\boxed{\text{フ}}$ 回である。

4 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \dfrac{q}{q-p}(1+q-p)$, $a_{n+1} = pa_n + q^n$ と定義する。ここで，n，p，q は自然数で，$p \neq q$ である。次の問いに答えなさい。

(1) a_n を求めなさい。

(2) すべての n で $\dfrac{a_n}{q^n} \geqq 1$ を満たすような p と q の関係を求めなさい。

(3) (2)の条件が満たされているとき，$\dfrac{a_n}{q^n}$ が取り得る最大の値を求めなさい。

(4) $q = 10$ かつ(2)の条件が満たされているとき，$a_n < 10^4$ を満たす最大の n を求めなさい。

（計算用余白）