令和４年度 入学試験問題

数学（前期）

試験時間	９０分
問題冊子	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題冊子は持ち帰ること。

受験番号		氏名	

［Ｉ］ 以下の文中の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{サ}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる１以上の整数が最小となる形で答えよ。

i を虚数単位とする。O を原点とする複素数平面上において，中心が O，半径が 2 の円を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，複素数平面上の点 $\mathrm{Q}(w)$ を次のように定める。

$$w=\frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$$

点 $\mathrm{P}(z)$ が C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ は複素数 $\alpha=-\boxed{ア}\,i$ で表される点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とし，半径 $r=\boxed{イ}$ の円上を動く。このとき，$z=w$ を満たす C 上の点 z がただ１つ存在し，その点を $\mathrm{B}(\beta)$ とおく。$z\neq\beta$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，等式

$$\frac{z-w}{z-\beta}=\frac{z-\boxed{ウ}-\boxed{エ}\,i}{z+\boxed{オ}-\boxed{カ}\,i}$$

が成り立つことを用いると，点 $\mathrm{P}(z)$ が $z\neq\beta$ かつ $\sqrt{5}\,\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{BP}$ を満たしながら C 上を動くとき，BP は最大値 $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ と最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ をとることがわかる。ただし，複素数平面上の２点 X，Y に対して，XY は２点 X，Y 間の距離を表す。

（計 算 用 紙）

［II］ n を 1 以上の整数とし，x，y を 1 以上 n 以下の整数とする。中が見えない 2 つの箱 A，B があり，A には赤球 x 個と白球 $n-x$ 個が，B には赤球 y 個と白球 $n-y$ 個が，それぞれ入っている。どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ である 1 つのさいころを 1 回投げて，1 の目が出たら A から 1 球を取り出し，1 以外の目が出たら B から 1 球を取り出すことを考える。その結果，赤球が取り出されたとき，この赤球が A から取り出された確率を p として以下の各問いに答えよ。

問 1　p を求めよ。答えのみでよい。

問 2　$\dfrac{1}{6} \leqq p \leqq \dfrac{2}{7}$ を満たす座標平面上の点 (x, y) の個数 $N(n)$ を求めよ。

問 3　問 2 の $N(n)$ に対して，$N(n) < 2022$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

（計 算 用 紙）

[III] a, b を $a > b > 0$ を満たす定数とし，m, k を正の定数とする。O を原点とする座標平面において，楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に直線 $l : y = -mx + k$ が第 1 象限の点 A で接しているとする。また，O から l に垂線 OH を下ろし，2 直線 OA，OH のなす角を θ とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　点 A の座標を m, a, b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　線分 OH の長さ h を m, a, b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$\sin\theta$ を m, a, b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　a, b を固定し，正の実数 m を動かすとき，$\sin\theta$ の最大値 $M(a, b)$ を求めよ。

問 5　a, b を，$a > b > 0$ かつ $(a-b)^2 + (b-1)^2 \leqq \dfrac{3}{4}$ を満たすように動かすとき，問 4 の $M(a, b)$ の最大値を求めよ。

（計 算 用 紙）

[IV]　関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$（ただし，$0\leqq x\leqq 1$）に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べて増減表をかき，グラフの概形をかけ。以上に関しては結果のみを解答欄に記せ。特に，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標は，

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

となる。$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ。

問 2　V を求めよ。

（計　算　用　紙）