

2023年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に1字1字記入してください。
3. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. 不明瞭な文字・まぎらわしい数字は採点の対象としないので注意してください。
7. この問題冊子は、試験終了後に持ち帰ってください。

— 下書き計算用 —

— 下書き計算用 —

[1]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし空欄(あ), (い), (う)には既約分数で表される有理数を記入すること。

(1) 三角形 ABC において辺 BC を 4 : 3 に内分する点を D とするとき, 等式

$$\boxed{\text{あ}} AB^2 + \boxed{\text{い}} AC^2 = AD^2 + \boxed{\text{う}} BD^2$$

が成り立つ。

(2) 式 $4z^2 + 4z - \sqrt{3}i = 0$ を満たす複素数 z は 2 つある。それらを α, β とする。ただし i は虚数単位である。 α, β に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P, Q とすると, 線分 PQ の長さは $\boxed{\text{え}}$ であり, PQ の中点の座標は $(\boxed{\text{お}}, \boxed{\text{か}})$ である。また, 線分 PQ の垂直二等分線の傾きは $\boxed{\text{き}}$ である。

(3) 曲線 $y = x \log(x^2 + 1)$ の $x \geq 0$ の部分を C とすると, 点 $(1, \log 2)$ における C の接線 l の方程式は $y = \boxed{\text{く}}$ である。また, 曲線 C と直線 l , および y 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{け}}$ である。

— 下書き計算用 —

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

n を自然数とする。A 君と B 君の 2 人が以下の試合 T を n セット行い、それぞれが得点をためていくとする。

試合 T

2 人で腕ずもうを繰り返し行う。毎回、A 君、B 君のどちらも勝つ確率は $\frac{1}{2}$ ずつである。どちらかが先に 2 勝したら、腕ずもうを行うのをやめる。2 勝 0 敗の者は 2 点を、2 勝 1 敗の者は 1 点を得る。2 勝しなかった者の得点は 0 点である。

A 君が 1 セット目から n セット目までに得た点の合計を a_n とし、B 君が 1 セット目から n セット目までに得た点の合計を b_n とする。

(1) $n=1$ とする。 $a_1=2$ である確率は であり、 $a_1=1$ である確率は である。

(2) $n \geq 4$ とする。試合 T を n セット行ううち、A 君が 2 点を得るのがちょうど 2 セット、かつ 1 点を得るのがちょうど 2 セットである確率は $\frac{\text{}}{\text{}}$ である。

(3) $n \geq 2$ とする。 $a_n = n + 2$ かつ $b_n = 0$ である確率は $\frac{\text{}}{\text{}}$ である。

(4) $a_n = 2$ である確率は $\frac{\text{}}{\text{}}$ である。

(5) $n=4$ とする。 $a_4 > b_4$ である確率は $\frac{\text{}}{\text{}}$ である。

— 下書き計算用 —

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面上の曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) を C とする。 a_1 を正の実数とし、点 $A_1\left(a_1, \frac{1}{a_1^2}\right)$ における C の接線を l_1 とする。 l_1 と C の交点で A_1 と異なるものを $A_2\left(a_2, \frac{1}{a_2^2}\right)$ とする。次に、点 A_2 における C の接線を l_2 とし、 l_2 と C の交点で A_2 と異なるものを $A_3\left(a_3, \frac{1}{a_3^2}\right)$ とする。以下同様にして $n=3, 4, 5, \dots$ に対して、 $A_n\left(a_n, \frac{1}{a_n^2}\right)$ における C の接線を l_n とし、 l_n と C の交点で A_n と異なるものを $A_{n+1}\left(a_{n+1}, \frac{1}{a_{n+1}^2}\right)$ とする。

- (1) $\frac{a_2}{a_1} = \boxed{\text{(あ)}}$ であり、 $\frac{a_3}{a_1} = \boxed{\text{(い)}}$ である。
- (2) a_n を a_1 を用いて表すと $a_n = \boxed{\text{(う)}}$ であり、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和 T を a_1 を用いて表すと $T = \boxed{\text{(え)}}$ である。
- (3) a_1 を正の実数すべてにわたって動かすとき、三角形 $A_1A_2A_3$ の重心が描く軌跡の方程式を $y = f(x)$ の形で求めると、 $f(x) = \boxed{\text{(お)}}$ となる。
- (4) 三角形 $A_1A_2A_3$ が鋭角三角形になるための条件は $\boxed{\text{(か)}} < a_1 < \boxed{\text{(き)}}$ である。
- (5) x 軸上に 2 点 $A'_1(a_1, 0)$ 、 $A'_2(a_2, 0)$ をとり、台形 $A_1A_2A'_2A'_1$ の面積を S_1 とする。また、点 A_1 から点 A_3 にいたる曲線 C の部分、および線分 A_3A_2 と A_2A_1 で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき、 $S_1 : S_2 = \boxed{\text{(く)}} : \boxed{\text{(け)}}$ である。ただし $\boxed{\text{(く)}}$ と $\boxed{\text{(け)}}$ は互いに素な自然数である。

— 下書き計算用 —

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面において原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、 C_1 の内部にある第 1 象限の点 P の極座標を (r, θ) とする。さらに点 P を中心とする円 C_2 が C_1 上の点 Q において C_1 に内接し、 x 軸上の点 R において x 軸に接しているとする。また、極座標が $(1, \pi)$ である C_1 上の点を A とし、直線 AQ の y 切片を t とする。

- (1) r を θ の式で表すと $r = \boxed{\text{(あ)}}$ となり、 t の式で表すと $r = \boxed{\text{(い)}}$ となる。
- (2) 円 C_2 と同じ半径をもち、 x 軸に関して円 C_2 と対称な位置にある円 C_2' の中心を P' とする。三角形 POP' の面積は $\theta = \boxed{\text{(う)}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{(え)}}$ をとる。条件 $\theta = \boxed{\text{(う)}}$ は条件 $t = \boxed{\text{(お)}}$ と同値である。
- (3) 円 C_1 に内接し、円 C_2 と C_2' の両方に外接する円のうち大きい方を C_3 とする。円 C_3 の半径 b を t の式で表すと $b = \boxed{\text{(か)}}$ となる。
- (4) 3つの円 C_2, C_2', C_3 の周の長さの和は $\theta = \boxed{\text{(き)}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{(く)}}$ をとる。

— 下書き計算用 —

