# 令和 4 (2022) 年度入学試験問題 (前期)

# 数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

# 数　学（前　期）

〔1〕 黒石3個と白石7個が袋に入っている。袋から1個ずつ10個の石を取り出して一列に並べる。

(1) 黒と白の合計10個の石の相異なる並び方の総数を求めよ。

(2) 黒石が3個連続する確率を求めよ。

(3) 並べた列が「2つ以上の連続した白石の両端に黒石がある」という部分を含む確率を求めよ。

〔2〕 $n$ を自然数とする。$0!=1$，関数 $g(x)$ に対して $\dfrac{d^0}{dx^0}g(x)=g(x)$ とする。

(1) $0 \leqq m \leqq n$ なる整数 $m$ に対して，$(x+1)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^m)$ を示せ。

(2) $f(x)$ が実係数の $n$ 次多項式のとき，$f(x+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}f(x)$ を示せ。

〔3〕 $0<a<b$ とする。曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ 上の $x$ 座標が $a$，$b$ である点をそれぞれA，Bとする。曲線 $C$，直線 $x=a$，$x=b$ および $x$ 軸で囲まれる部分を $R$ とおく。$x$ 座標が $\sqrt{ab}$ である曲線 $C$ 上の点をDとして，線分AD，DB，$x=a$，$x=b$ および $x$ 軸で囲まれる図形を $T$ とおく。$x$ 座標が $\dfrac{a+b}{2}$ である曲線 $C$ 上の点における $C$ への接線を $m$ として，直線 $m$，$x=a$，$x=b$ および $x$ 軸で囲まれる台形を $U$ とおく。図形 $R$，$T$，$U$ の面積をそれぞれ $S(R)$，$S(T)$，$S(U)$ とおく。

(1) $S(R)$ を $a$，$b$ で表せ。

(2) $S(T)$，$S(U)$ を $a$，$b$ で表せ。

(3) 不等式 $\dfrac{2}{a+b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ を示せ。

〔4〕 $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に対し，平面上の点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を対角線とする正方形ABCDを考える。ただしACの中点をMとするとき，Mのまわりに反時計回りにAを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた点がBであるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ の成分を求めよ。

(2) 点B，Dの座標を求めよ。

$\theta$ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，正方形ABCDの周と内部が通過してできる図形を $W$ とする。

(3) $W$ は $x^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域に含まれることを示せ。

(4) $W$ の面積を $S$ とするとき $S \geqq 2$ を示せ。

〔5〕 数字1，2，…，$n$ の順列 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ に対して，$xy$ 平面上の点の集合 $\{(1,\ x_1),\ (2,\ x_2),\ \cdots,\ (n,\ x_n)\}$ を考える。この集合が直線 $y=x$ に関して線対称であるような順列をここでは対称な順列と呼ぶことにする。対称な順列の個数を $a_n$ とするとき，$a_1=1$，$a_2=2$ である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}$$

(2) すべての自然数 $k$ に対し，$a_{3k+1} \equiv a_{3k} \pmod 3$，$a_{3k+2} \equiv 2a_{3k} \pmod 3$ を示せ。ただし，整数 $a$，$b$ と正整数 $m$ について，$a-b$ が $m$ の倍数であるとき $a \equiv b \pmod m$ と表す。

(3) すべての自然数 $n$ に対し，$a_n$ は3の倍数でないことを示せ。