# 令和 3 (2021) 年度入学試験問題 (前期)

# 数　　　学

**注　　意**

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

# 数　学（前　期）

〔1〕 $a>0$ を定数とし，$I=\int_0^a e^{-x}\sqrt{a-x}\,dx$ とおく。

(1) $0\leqq x\leqq a$ において，$\dfrac{a-x}{\sqrt{a}}\leqq\sqrt{a-x}\leqq\sqrt{a}$ を示せ。

(2) $\sqrt{a}-\dfrac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}}\leqq I\leqq\sqrt{a}-\sqrt{a}\,e^{-a}$ を示せ。

〔2〕 袋の中に赤札が3枚，青札が3枚入っている。Aさんは，この袋から無作為に札を3枚取り出して箱の中に入れる。Bさんは，この箱の中から札を1枚取り出し，色を確認して箱に戻すという操作を繰り返し行う。

(1) Aさんが箱の中に入れた3枚の札のうちで赤札の枚数が0，1，2，3である確率をそれぞれ求めよ。

(2) Bさんが箱から最初に取り出した札が赤札である確率を求めよ。

(3) Bさんが箱から1回目，2回目に取り出した札がどちらも赤札である確率を求めよ。

(4) Bさんが箱から札を $n$ 回取り出して，それがすべて赤札だったとする。箱の中の3枚の札がすべて赤札である確率を求めよ。

〔3〕 $\alpha$ を $|\alpha|=1$，$\alpha\neq1$ なる複素数とする。複素数平面上の点の列 $z_1$，$z_2$，…を次のように定義する。

$$\begin{cases} z_1=1 \\ z_{n+1}=\alpha z_n+1\ (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

(1) すべての正整数 $n$ について $z_{n+1}-\beta=\alpha(z_n-\beta)$ を満たす複素数 $\beta$ を求めよ。

(2) $z_m=z_n$ となる相異なる正整数 $m$，$n$ が存在するとき $\alpha^{|m-n|}=1$ であることを示せ。

(3) $\alpha$ は，ある無理数 $r$ により $\alpha=\cos2\pi r+i\sin2\pi r$ と表されるとする。このときすべての相異なる正整数 $m$，$n$ に対し $z_m\neq z_n$ であることを示せ。

〔4〕 直円錐に半径1の球が内接している。（つまり，球が直円錐の側面と接し，底面とは底面の円の中心で接する。）直円錐の母線と底面のなす角を $2\theta\left(0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，円錐の側面積を $S$ とする。

(1) $S$ を $\theta$ で表せ。

(2) $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=u$ とする。$S$ を $u$ の関数としてグラフの概形を描き，また $S$ の最小値を求めよ。

〔5〕

(1) $a$，$b$ を互いに素な自然数とするとき，$x$，$y$ の一次方程式 $ax=by$ の整数解をすべて求めよ。（答えのみでよい。）

自然数 $n$，$i$，$j$ は $n-1\geqq i>j\geqq1$ を満たすとする。

(2) 次の等式を証明せよ。

$${}_nC_i\cdot{}_iC_j={}_nC_j\cdot{}_{n-j}C_{i-j}$$

(3) ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ とは互いに素ではないことを，背理法で示せ。