数学

時間＝90分

1. m を定数とし，次の2つの2次方程式 $x^2-3x+2m+2=0$ …①，$x^2+2x-m-3=0$ …②を考える。

(1) ①が異なる2つの実数解をもつのは $m<\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときである。

(2) ②の1つの解が $x=3$ であるとき，もう1つの解は $x=-\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) ①，②が共通の実数解をもつのは，$m=\boxed{\text{エ}}$，$-\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のときである。

2. 1000から2020までの整数について考える。

(1) 3で割り切れる整数は全部で $\boxed{\text{クケコ}}$ 個ある。

(2) 1110のように各位の数字がちょうど3つだけ同じになる整数は全部で $\boxed{\text{サシ}}$ 個ある。

(3) 千の位，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a，b，c，d とするとき，$a+c=b+d$ となる1000から2020までの整数は全部で $\boxed{\text{スセ}}$ 個ある。

3. 点 $(x,\ y)$ が連立不等式 $\begin{cases} y \geqq x \\ y \geqq -2x \\ y \leqq -\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases}$ の表す領域を動くとする。

(1) 点 $(0,\ 3)$ から直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ までの距離は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) x^2+y^2-6y は $x=-\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ のとき，最小値 $-\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ をとる。

4. $a_1=1$，$a_2=16$，$a_{n+2}=5a_{n+1}+14a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $a_3=\boxed{\text{マミ}}$ であり，$a_n=\boxed{\text{ム}}\cdot\boxed{\text{メ}}^{\,n-1}-(-\boxed{\text{モ}})^{n-1}$ である。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\boxed{\text{メ}}^{\,n}+(-\boxed{\text{モ}})^n-\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

5. 1辺の長さが6の正四面体OABCにおいて，辺ABを3：2に内分する点をDとする。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\text{ヨラ}}$ である。また，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{\text{リ}}\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{ル}}\overrightarrow{OB}-\boxed{\text{レ}}\overrightarrow{OC}}{\boxed{\text{ロ}}}$ である。

(2) 辺BCを $s:(1-s)$（ただし，$0<s<1$）に内分する点をEとする。このとき，CD⊥OEとなるのは，$s=\dfrac{\boxed{\text{ワ}}}{\boxed{\text{あ}}}$ のときであり，△ADEの面積は $\dfrac{\boxed{\text{いう}}\sqrt{\boxed{\text{え}}}}{\boxed{\text{おか}}}$ である。

6. 関数 $f(x)=x^2\log x$ を考える。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) $f'(x)=x(\boxed{\text{き}}\log x+\boxed{\text{く}})$ であり，$f(x)$ の極小値は $-\dfrac{\boxed{\text{け}}}{\boxed{\text{こ}}\,e}$ である。

(2) 方程式 $|f(x)|=k$ について，実数解の個数が1個となるのは，$k=\boxed{\text{さ}}$，$k>\dfrac{\boxed{\text{し}}}{\boxed{\text{す}}\,e}$ のときである。

1