

令和3年度
一般選抜（前期）

10時00分～12時30分

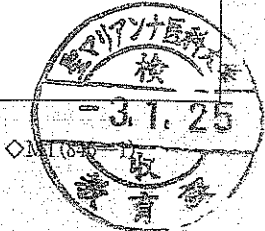
数 学 ・ 英 語
問 題 冊 子

科目名	頁
数 学	1 ～ 7 頁
英 語	10 ～ 16 頁

注 意 事 項

1. 試験開始の合図〔チャイム〕があるまで、この注意をよく読むこと。
2. 試験開始の合図〔チャイム〕があるまで、問題冊子ならびに解答用紙は開かないこと。
3. 試験開始の合図〔チャイム〕の後に問題冊子ならびに解答用紙の全ページの所定の欄に受験番号と氏名を記入すること。
4. 解答はかならず定められた解答用紙を用い、それぞれ定められた位置に問題の指示に従って記入すること。また、解答用紙に解答以外のことを書かないこと。
5. 解答はすべて黒鉛筆を用いてはっきりと読みやすく書くこと。
6. 問題冊子の余白および裏面を計算に利用してもよい。
7. 質問は文字が不鮮明なときに限り受け付ける。
8. 問題冊子に、落丁や乱丁があるときは手を挙げて交換を求めること。
9. 試験開始60分以内および試験終了前10分間は、退場を認めない。
10. 試験終了の合図〔チャイム〕があったとき、ただちに筆記用具を置くこと。
11. 試験終了の合図〔チャイム〕の後は、問題冊子ならびに解答用紙はいずれも表紙を上にして、通路側から解答用紙、問題冊子の順に並べて置くこと。いっさい持ち帰ってはならない。
なお、途中退場の場合は、すべて裏返しにして置くこと。
12. その他、監督者の指示に従うこと。

受験番号		氏 名	
------	--	-----	--



1 以下の設問 (1), (2) の ア ～ オ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 実数 a に対して $f_n(a) = 1 - a + a^2 + \cdots + (-a)^{n-1}$ (n は自然数) とする。

$f_n(a)$ は初項 1, 公比 ア の等比数列の和なので

$$f_n(a) = \frac{\text{イ}}{1+a}$$

となる。 $|a| < 1$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \frac{\text{ウ}}{1+a}$$

となる。

(2) n と $\sqrt{n^2 + 2021}$ がともに自然数であるとき, n は エ または オ である。

ただし, $2021 = 43 \times 47$ である。



2 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ とし $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ がどのような値か知るため以下のように考えた.

設問 (1) ~ (3) の カ ~ ソ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に

記入せよ. また必要があれば $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ を用いよ.

(1) $g(x) = 1 - x + x^2$ とする. $h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと

$$h'(x) = \frac{\text{カ}}{(1+x)^2}$$

となる. $h'(x) = 0$ の解は $x = 0$ または $x = \text{キ}$ であり, $x > 0$ の範囲で $h'(x) > 0$ となることからわかる. これより $x > 0$ の範囲で $h(x) > h(0) = \text{ク}$, つまり $g(x) > f(x)$ であることがわかる. したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx < \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \text{ケ}$$

である.

(2) 曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線を $\ell: y = k(x)$ とする. $b = \frac{1}{1+a}$ とおいて ℓ の

方程式を a を用いず b を用いて表すと $y = k(x) = b(\text{コ})$ となる. グラフを考え

れば $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ の範囲で $f(x) \geq k(x)$ であることがわかるので

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} b(\text{コ}) dx = b(\text{サ}b + \text{シ})$$

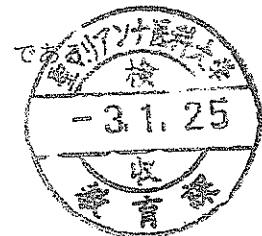
となる.

(3) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ に対応する b の範囲は $\text{ス} \leq b \leq \text{セ}$ である. (2) で求めた式の右辺につ

いて最大値を求めると ソ である.

(1), (2), (3) より

$$\text{ソ} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x} dx < \text{ケ}$$

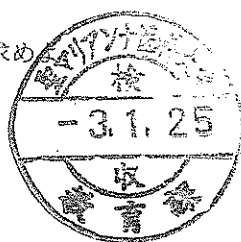


- 3 10 人の生徒が受けたテストの得点分布を以下に示す。テストの得点は 10 点刻みで平均点は 75 点であった。

得点	40	50	60	70	80	90	100
人数	1	1	a	b	c	d	a

a, b, c, d は 0 以上の整数で、同じ数であってもよい。以下の設問 (1) ～ (3) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

- (1) $a = 2$ のとき、 d の値となりうる整数をすべて求めよ。
- (2) 分散が最大となる (a, b, c, d) を求めよ。
- (3) 分散が最小となる (a, b, c, d) を求めよ。



4 1より大きい自然数 m に対して, 2つの整数の組からなる集合 A_m を次のように定義する.

$$A_m = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} \right\}$$

また A_m の要素の個数を $n(A_m)$ で表す. 以下の設問 (1)~(4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に答えよ.

- (1) A_m の要素 (x, y) に対して $X = x - m$, $Y = y - m$ とおくとき, XY を m を用いて表せ. また $n(A_3)$ を求めよ.
- (2) $n(A_m)$ は有限であることを示せ.
- (3) $n(A_m)$ は奇数であることを示せ.
- (4) 自然数 m が $m = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3}$ と素因数分解できる場合を考える. ここで p_1, p_2, p_3 は異なる素数, e_1, e_2, e_3 は 0 以上の整数である. $n(A_m)$ を e_1, e_2, e_3 を用いて表せ.

