令和３年度
一般選抜（前期）

１０時００分～１２時３０分

数　学・英　語

問　題　冊　子

科目名	頁
数　学	１　～　７　頁
英　語	１０　～　１６　頁

注　意　事　項

１．試験開始の合図［チャイム］があるまで、この注意をよく読むこと。
２．試験開始の合図［チャイム］があるまで、問題冊子ならびに解答用紙は開かないこと。
３．試験開始の合図［チャイム］の後に問題冊子ならびに解答用紙の全ページの所定の欄に受験番号と氏名を記入すること。
４．解答はかならず定められた解答用紙を用い、それぞれ定められた位置に問題の指示に従って記入すること。また、解答用紙に解答以外のことを書かないこと。
５．解答はすべて黒鉛筆を用いてはっきりと読みやすく書くこと。
６．問題冊子の余白および裏面を計算に利用してもよい。
７．質問は文字が不鮮明なときに限り受け付ける。
８．問題冊子に、落丁や乱丁があるときは手を挙げて交換を求めること。
９．試験開始６０分以内および試験終了前１０分間は、退場を認めない。
１０．試験終了の合図［チャイム］があったとき、ただちに筆記用具を置くこと。
１１．試験終了の合図［チャイム］の後は、問題冊子ならびに解答用紙はいずれも表紙を上にして、通路側から解答用紙、問題冊子の順に並べて置くこと。いっさい持ち帰ってはならない。
なお、途中退場の場合は、すべて裏返しにして置くこと。
１２．その他、監督者の指示に従うこと。

受験番号		氏　　名	

◇M1(6-[illegible])

$\boxed{1}$ 以下の設問 (1), (2) の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) 実数 a に対して $f_n(a) = 1 - a + a^2 + \cdots\cdots + (-a)^{n-1}$ (n は自然数) とする．
$f_n(a)$ は初項 1，公比 $\boxed{\text{ア}}$ の等比数列の和なので

$$f_n(a) = \frac{\boxed{\text{イ}}}{1+a}$$

となる．$|a| < 1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{1+a}$$

となる．

(2) n と $\sqrt{n^2+2021}$ がともに自然数であるとき，n は $\boxed{\text{エ}}$ または $\boxed{\text{オ}}$ である．
ただし，$2021 = 43 \times 47$ である．

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とし $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ がどのような値か知るため以下のように考えた．

設問 (1) ～ (3) の $\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．また必要があれば $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ を用いよ．

(1) $g(x)=1-x+x^2$ とする．$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$h'(x)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{(1+x)^2}$$

となる．$h'(x)=0$ の解は $x=0$ または $x=\boxed{\text{キ}}$ であり，$x>0$ の範囲で $h'(x)>0$ となることがわかる．これより $x>0$ の範囲で $h(x)>h(0)=\boxed{\text{ク}}$，つまり $g(x)>f(x)$ であることがわかる．したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx<\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx=\boxed{\text{ケ}}$$

である．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線を $\ell : y=k(x)$ とする．$b=\dfrac{1}{1+a}$ とおいて ℓ の方程式を a を用いず b を用いて表すと $y=k(x)=b\left(\boxed{\text{コ}}\right)$ となる．グラフを考えれば $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲で $f(x)\geqq k(x)$ であることがわかるので

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx\geqq\int_0^{\frac{1}{2}} b\left(\boxed{\text{コ}}\right)dx=b\left(\boxed{\text{サ}}\,b+\boxed{\text{シ}}\right)$$

となる．

(3) $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ に対応する b の範囲は $\boxed{\text{ス}}\leqq b\leqq\boxed{\text{セ}}$ である．(2) で求めた式の右辺について最大値を求めると $\boxed{\text{ソ}}$ である．

(1), (2), (3) より

$$\boxed{\text{ソ}}\leqq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x}\,dx<\boxed{\text{ケ}}$$

である．

$\boxed{3}$ 10 人の生徒が受けたテストの得点分布を以下に示す．テストの得点は 10 点刻みで平均点は 75 点であった．

得点	40	50	60	70	80	90	100
人数	1	1	a	b	c	d	a

a, b, c, d は 0 以上の整数で，同じ数であってもよい．以下の設問 (1) ～ (3) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) $a=2$ のとき，d の値となりうる整数をすべて求めよ．

(2) 分散が最大となる (a, b, c, d) を求めよ．

(3) 分散が最小となる (a, b, c, d) を求めよ．

$\boxed{4}$ 1より大きい自然数 m に対して，2つの整数の組からなる集合 A_m を次のように定義する．

$$A_m = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} \right\}$$

また A_m の要素の個数を $n(A_m)$ で表す．以下の設問 (1)〜(4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に答えよ．

(1) A_m の要素 (x, y) に対して $X = x - m$, $Y = y - m$ とおくとき，XY を m を用いて表せ．また $n(A_3)$ を求めよ．

(2) $n(A_m)$ は有限であることを示せ．

(3) $n(A_m)$ は奇数であることを示せ．

(4) 自然数 m が $m = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3}$ と素因数分解できる場合を考える．ここで p_1, p_2, p_3 は異なる素数，e_1, e_2, e_3 は 0 以上の整数である．$n(A_m)$ を e_1, e_2, e_3 を用いて表せ．

以上