

数 学

1 ～ 10 ページ（問題は1, 3, 5, 7, 9ページにあります。）

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答時間は75分間です。
3. 解答用紙はマークシート解答用紙1枚と記述式問題解答用紙1枚の合計2枚です。
4. マークシート解答用紙の記入にあたっては、解答用紙の注意事項を参照し、HBの鉛筆を使用して丁寧にマークしなさい。
5. 受験番号、氏名、フリガナをマークシート解答用紙に記入しなさい。受験番号は記入例を参照して、正しくマークしなさい。
6. 受験番号を、記述式問題解答用紙の所定欄に記入しなさい。
7. マークの訂正には、消しゴムを用い、消しえずは丁寧に取り除きなさい。
8. 試験開始後、ただちにページ数を確認し、落丁や印刷の不鮮明なものがあれば申し出なさい。
9. 試験終了後、解答用紙2枚を提出しなさい。問題冊子は持ち帰りなさい。
10. マークシート解答用紙は折り曲げないようにしなさい。
11. 受験番号欄にマークミスがあった場合は、採点対象外となります。

マークシート解答用紙の受験番号記入例

数字の位置	受 験 番 号				
	万	千	百	十	一
	1	2	3	4	5
0	○	○	○	○	○
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○

問題 [1], [2], [3] は, マークシートに解答を記入しなさい. ただし, 分数は既約分数で答え, 平方根を含む解答は平方根の中をできるだけ簡単にして答えなさい. 問題[4], [5] は, 「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい.

[1] 以下の問いに答えなさい.

- (1) 2つの放物線 $y = 4x^2 - 7x - 1$ と $y = x^2 - 2x + 1$ の共有点の x 座標の値は

$$x = -\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \boxed{3} \text{ である. また, 2つの共有点をともに通る直線の方程式は}$$

$$y = -\frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}x + \frac{\boxed{6}}{\boxed{7}} \text{ である.}$$

- (2) 100 以下の自然数全体を全体集合 U とし, U の部分集合 A, B, C を

$$A = \{a \mid a \text{ は } 2 \text{ の倍数}\}, B = \{b \mid b \text{ は } 3 \text{ の倍数}\},$$

$$C = \{c \mid c \text{ は } 5 \text{ の倍数}\} \text{ とする.}$$

$$\text{このとき, } n(A \cap B \cap C) = \boxed{8}, n(A \cap (\overline{B \cup C})) = \boxed{9} \boxed{10} \text{ である.}$$

ここで, $n(T)$ は集合 T の要素の個数を表す.

- (3) 三角形 ABC において, 各頂点 A, B, C の対辺の長さを a, b, c で表すとする.

いま, $\angle C = 120^\circ$, $c = 8$, かつ, $a^4 + c^2a^2 - b^2c^2 - b^4 = 0$ ならば,

$$a = \frac{\boxed{11}}{\boxed{12}}\sqrt{\boxed{13}} \text{ である.}$$

- (4) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{5}x + 3, \\ y \geq x - 3, \\ x \geq 0, \\ y \geq -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

により囲まれる図形を D で表す. (x, y) を D の点とすると, $x + 3y$ の最小値は

$$\boxed{14} \text{ であり, 最大値は } \boxed{15} \boxed{16} \text{ である.}$$

計算用余白

[2] 以下の問いに答えなさい.

- (1) t を実数とする. ベクトル $\vec{a} = (1 - t, 2 - t, 2t + 3)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ を考える. このとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{17}$ である. また, $|\vec{a} - \vec{b}|$ は $t = -\frac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ のとき最小値 $\frac{1}{\boxed{20}}\sqrt{\boxed{21}\boxed{22}}$ をとる.

- (2) $0 \leq x \leq 2\pi$ とするとき, 関数 $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos x$ の最小値は $-\frac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$, 最大値は $\frac{\boxed{25}\boxed{26}}{\boxed{27}\boxed{28}}$ である.

- (3) i を虚数単位とし, $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする. いま数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \operatorname{Re}(z^n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. ただし, $\operatorname{Re}(w)$ は複素数 w の実部を表す. このとき,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = -\frac{\boxed{29}}{\boxed{30}\boxed{31}} \text{ であり, } \sum_{n=1}^{2020} a_n = -\frac{\boxed{32}}{\boxed{33}} \text{ である.}$$

- (4) 整式 $P = a^4 - 25a^2 - 50a - 25$ を因数分解すると

$$P = (a^2 + \boxed{34}a + \boxed{35})(a^2 - \boxed{36}a - \boxed{37}) \text{ である. 整数 } a \text{ に対して,}$$

$|P|$ が素数となるのは全部で $\boxed{38}$ 個あり, それらのうち最大の素数は

$$\boxed{39}\boxed{40} \text{ である.}$$

計算用余白

[3] A 君と B 君がさいころを振り得点を争うゲームを行うとする. 最初に A 君は持ち点 10 点, B 君は持ち点 6 点あり, この状態からゲームを始めるとする. さいころを振り, 出た目が 2 以下ならば A 君に +1 点, B 君に +3 点与えられる. また, さいころを振り, 出た目が 3 以上ならば A 君に +2 点, B 君に +1 点与えられる. さいころを n 回振り, 2 以下の目が出た回数を x とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) $n = 50$ とする. このとき, A 君と B 君の得点がちょうど等しくなるならば,

$x =$

41	42
----	----

 であり, そのときの各自の得点は

43	44
----	----

 点である.

(2) $n = 5$ とする. このとき, A 君と B 君の得点がちょうど等しくなる確率は

45	46
----	----

47	48	49
----	----	----

 である.

(3) $n = 6$ とする. このとき, A 君の得点が B 君の得点よりも小さくなる確率は

50	51
----	----

52	53	54
----	----	----

 である.

計算用余白

以下の問題 [4], [5] は, 「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい.

[4] 関数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2(1 + e^x)}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ の導関数を求めなさい.

(2) $f(x)$ は区間 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において単調減少であることを示しなさい.

(3) p, q を定数とする. 区間 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において, 不等式

$$1 - px^2 \leq \frac{1}{1 + e^x} \leq 1 - qx^2$$

が つねに成り立つような p と q のうち, $|p - q|$ が最小となるときの p と q の値をそれぞれ求めなさい.

計算用余白

[5] 関数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい.

(2) $x > 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$ の変曲点において, 曲線に接する直線を ℓ とする.
 ℓ の方程式を求めなさい.

(3) $x > 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$ に点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ で接する直線を m とする.

(2)で求めた直線 ℓ と直線 m および曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めなさい.

計算用余白

