数　　学

〔理学部(数理情報科学プログラム・物理宇宙プログラム・地球科学プログラム)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて5ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，黒板等に掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し，学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の問いに答えよ。

(1) a, b は自然数で，$p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$ とする。p が素数となるような a, b をすべて求めよ。

(2) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1$ を解け。

(3) n を自然数とする。1 から $2n$ までの数字が 1 つずつ書かれた $2n$ 枚のカードがある。この中から 1 枚のカードを等確率で選ぶ試行において，選ばれたカードに書かれた数が偶数であることがわかっているとき，その数が n 以下である確率を求めよ。

2 t を正の実数とする。実数全体の集合の，2 つの部分集合 A, B を次のように定める。

$A = \{a \mid$ すべての実数 x に対して $x^2 + (a+1)x + 2a > 0$ が成り立つ$\}$
$B = \{b \mid bx^2 + tx + (b+t) < 0$ を満たす実数 x が存在する$\}$

(1) 集合 A に属する実数 a の範囲を求めよ。

(2) 集合 B に属する実数 b の範囲を，t を用いて表せ。

(3) $A \cap B$ が空集合でないような t の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$, $\boxed{3-2}$, $\boxed{3-3}$ から1題を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1=0$，$b_1=1$，および次の漸化式で定める。

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+\sqrt{3}\,b_n \\ b_{n+1}=-\sqrt{3}\,a_n+b_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+3}=-8a_n$，$b_{n+3}=-8b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} a_n$ を求めよ。

(4) 次で定まる T の値を求めよ。

$$T=\frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020}+\sum_{n=1}^{2020} a_n$$

$\boxed{3-2}$ 鋭角三角形OABの頂点Aから辺OBに下ろした垂線と辺OBの交点をD，頂点Bから辺OAに下ろした垂線と辺OAの交点をEとする。また，ADとBEの交点をHとする。OA $=1$，OB $=k$ とし，$\angle$OAD $=\theta$ とする。

(1) ODとOEを k，θ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OH}$ を k，θ，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(3) Hが三角形OABの重心Gと一致するとき，k，θ を求めよ。

3 — 3 1個のさいころを3回投げる。

(1) 3回とも偶数の目が出る事象を A, 出る目の数がすべて異なる事象を B とする。このとき, A と B は独立であるか, 独立でないか, 答えよ。

(2) 出る目の数の和を X とし, $Y = 2X$ とおく。確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ。

(3) 出る目の数の最大値を Z_1, 最小値を Z_2 とする。このとき, $Z_1 = 5$ かつ $Z_2 = 2$ となる確率 $P(Z_1 = 5,\ Z_2 = 2)$ を求めよ。

4 xy 平面上で双曲線 H と放物線 C が，次の方程式で与えられている。

$$H : x^2 - y^2 = 1,\ \ C : y = \frac{a}{2}x^2 + b \quad (\text{ただし，} a,\ b \text{ は実数，} a > 0)$$

H と C は，第1象限においてただ一つの共有点Pをもち，点Pで共通の接線 l_1 をもつとする。このとき，H と C が第2象限にただ一つもつ共有点をQとし，H と C が点Qでもつ共通の接線を l_2 とする。

(1) 点Pの座標$(s,\ t)$と b を，a を用いて表せ。

(2) 接線 l_1 の方程式を，a を用いて表せ。

(3) 放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S を，a を用いて表せ。

(4) a が正の実数を動くとき，面積 S の最小値を求めよ。

5 xy 平面上を運動する点Pの描く曲線 C が，時刻変数 t によって

$$x = \sin t,\ \ y = \sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と媒介変数表示されているとする。

(1) 点Pの速度ベクトル $\vec{v}$ を，t を用いて表せ。

(2) t が動くとき，点Pの速さ $|\vec{v}|$ の最小値を求めよ。ただし，最小値をとるときの t の値は求めなくてよい。

(3) x，y で表した曲線 C の方程式を求め，そのグラフの概形を下の図 (あ)～(え) の中からひとつ選べ。

(4) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。