福島県立医科大学

令　和　２　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

(時間：120 分)

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

4　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません。

5　試験終了後，解答用紙のみを回収します。

〔1〕 以下の各問いについて答えだけを書け。

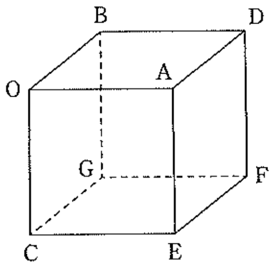
(1) $\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 複素数平面上に3点 $\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(z^2)$, $\mathrm{C}(z^3)$ があって，△ABC は辺の長さの比が2：2：1の二等辺三角形になっている。このような条件を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(3) 座標平面上の2つの曲線 $y=x^3-5x$ と $y=ax^2-5x$ は2つの交点を有し，1つの交点における各接線は直交している。a の値をすべて求めよ。

(4) $(1+x+x^3)^{10}$ の展開式における x^7 の項の係数を求めよ。

〔2〕 $0<t<\dfrac{1}{2}$ とする。一辺の長さが1の立方体 OADB − CEFG において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。対角線 OF を $t:1-t$ に内分する点 P から対角線 AG, BE, DC に下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R, S とおく。以下の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t で表せ。

(2) △QRS は正三角形であることを示せ。

(3) 四面体 PQRS に外接する球の半径を t で表せ。

〔3〕 $0<a<1$ とする。関数 $f(x)=x\log(x^2+a)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) x の方程式 $f'(x)=0$ は正の解と負の解を1つずつもつことを示せ。

(2) (1)の正の解を θ とする。関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べて，そのグラフの概形をかけ。

(3) (2)の θ について，原点と点 $(\theta,\ f(\theta))$ を結んだ直線と，曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積を a, θ で表せ。

(4) (3)の面積を S として，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}S$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to+0}a\log a=0$ は証明なしで用いてよい。

〔4〕 $j\ (1\leqq j\leqq 4)$ と k を自然数とする。1つのおまけが付いた商品を1個ずつ繰り返し購入する。おまけは全部で4種類あり，購入した後にならないとどの種類かはわからないが，どの種類も等しい確率で入っている。商品を k 個購入した時点で集まったおまけが j 種類であるという事象を $A_{k,j}$ とし，$A_{k,j}$ の起こる確率を $p_{k,j}$ とする。ただし，$k<j$ のときは $p_{k,j}=0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $p_{j,j}$ を j で表せ。また，$p_{k,1}$ を k で表せ。

(2) $j\leqq k$ であるとき，事象 $A_{k,j}$ が起こったときの事象 $A_{k+1,j}$ が起こる条件付き確率 $\mathrm{P}(A_{k+1,j}|A_{k,j})$ を j, k で表せ。

(3) $p_{k+1,j}$, $p_{k,j}$, $p_{k,j-1}$ の満たす関係式を求めよ。ただし，$p_{k,0}=0$ とする。

(4) $p_{k,2}$ を k で表せ。