獨協医科大学 医学部

令和２年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

# 数　学 (70分)

Ⅰ　注意事項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。

**4, 6, 8, 10, 12ページ**

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

**受験番号を記入し**，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

**氏名・フリガナを記入**しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　解答上の注意

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

| 受験番号 | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

## 解答上の注意

**解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。**
問題の文中の $\boxed{\quad\text{ア}\quad}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（−，±），自然対数の底（$e$）のいずれかが入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

**例1**　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-83$ と答えたいとき。

| 1 | 解 | | | | 答 | | | | 欄 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| ア | ● | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| イ | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ● | 9 | $e$ |
| ウ | − | ± | 0 | 1 | 2 | ● | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

**例2**　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

| 1 | 解 | | | | 答 | | | | 欄 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| エ | ● | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| オ | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | ● | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| カ | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ● | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) 座標平面上で方程式 $7x^2+4\sqrt{3}xy+3y^2=4$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合を $C$ とする。集合 $C$ に属する点Pについて，原点Oとの距離OPの最大値および最小値を次の手順で求める。

$\mathrm{OP}=r\,(r>0)$，$x$ 軸の正の部分から半直線OPまでの回転角を $\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，点Pの座標は $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表すことができる。$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおいて，$7x^2+4\sqrt{3}xy+3y^2$ を $r$ と $\theta$ を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
&7x^2+4\sqrt{3}xy+3y^2\\
&=r^2\left(\boxed{\text{ア}}\cos2\theta+\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin2\theta+\boxed{\text{エ}}\right)\\
&=r^2\left\{\boxed{\text{オ}}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right)+\boxed{\text{エ}}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。これよりOPは，$\theta$ の範囲に注意すると，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi,\ \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$

のとき最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとり，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi,\ \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

をとることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{キ}}<\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

(2) 双曲線 $H:x^2-y^2=1$ と直線 $\ell:y=k(x-1)+3$ （$k$ は定数）について，

$H$ と $\ell$ がただ1つの共有点をもつような定数 $k$ の値は $k=\pm\boxed{\text{タ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。また，$H$ と $\ell$ が異なる2点A，Bで交わるとき，A，Bの $x$ 座標をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とする。$\alpha+\beta$ の値を $k$ を用いて表すと

$$\alpha+\beta=\frac{\boxed{\text{テ}}k^2-\boxed{\text{ト}}k}{k^2-\boxed{\text{ナ}}}$$

であり，点Q(1，3)について，$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$ を満たす定数 $k$ の値は $k=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

**2** 実数$x$, $y$についての2つの不等式

$$2^{3x+3y+1}+2^{-3x-3y+1}+4^{x+y}+4^{-x-y}-5(2^{x+y}+2^{-x-y})-8\leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(\log_2 x)^2\leqq \log_2 x^2-\log_x 8 \quad \cdots\cdots ②$$

がある。

$t=2^{x+y}+2^{-x-y}$とおく。①の左辺を$t$で表すと

$$\boxed{\text{ア}}\,t^3+t^2-\boxed{\text{イウ}}\,t-\boxed{\text{エオ}}$$

である。

条件①の下で，$t$のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{カ}}\leqq t\leqq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，$x+y$のとりうる値の範囲は

$$-\boxed{\text{ケ}}\leqq x+y\leqq \boxed{\text{コ}}$$

である。

$s=\log_2 x$とおく。条件②の下で，$s$のとりうる値の範囲は

$$-\boxed{\text{サ}}\leqq s<\boxed{\text{シ}}$$

である。よって，不等式②の解は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\leqq x<\boxed{\text{ソ}}$$

である。

実数$x$, $y$が不等式①と②をともに満たすとき

$3x+2y$の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ 白玉と赤玉があり，各玉には番号が1つずつ書かれている。正の整数$k$について，番号$k$の書かれた白玉を白$k$，番号$k$の書かれた赤玉を赤$k$などと略記する。

(1) 白1，白2，白3，赤1，赤2，赤3の計6個の玉の円順列を作る。

(i) どの同じ番号の玉も隣り合う確率は$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$である。

(ii) 白1と赤1が向かい合う確率は$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$であり，白1と赤1が向かい合い，かつどの同じ番号の玉も隣り合わない確率は$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$である。

また，どの同じ番号の玉も隣り合わない確率は$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$である。

(iii) 同じ番号の玉がちょうど1組隣り合う確率は$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$である。

(2) 白1，白2，白3，白4，赤1，赤2，赤3，赤4の計8個の玉の円順列を作るとき，どの同じ番号の玉も隣り合わない確率は$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチツ}}}$である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ 三角形 ABC は AB $=4$, AC $=5$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5$ を満たしている。
三角形 ABC の外心を O, 外接円を $K$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ア}}$ である。また, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。

(2) 円 $K$ の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を三角形 DBC の面積が最大となるようにとり, 線分 AD と線分 BC との交点を E とする。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。また, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ($t$ は実数) とおくとき, $t$ の値は $t=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3) (2) の D について, 線分 BC 上に $\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=0$ かつ BP $>$ CP を満たす点 P をとる。このとき

$$\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\boxed{\text{ツ}}-\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}[x]-\left[\frac{1}{2}x\right]\right)\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|$ $(x \geqq 0)$ がある。ただし，$[x]$ は $x$ を超えない最大の整数を表す。

(1) $0 \leqq x < 1$ のとき $f(x)=\boxed{ア}$，$1 \leqq x < 2$ のとき

$$f(x)=\frac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}\cos\frac{\pi}{2}x$$ である。

$n$ を正の整数とする。$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸，および直線 $x=2n$ で囲まれる図形を $x$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を $V_n$ とすると，

$$V_1=\frac{\pi}{\boxed{オ}}$$ であり，$$\sum_{k=1}^{4n}V_k=\frac{\pi n}{\boxed{カ}}$$ である。

(2) $$\int e^{-x}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{\boxed{キ}e^{-x}}{\pi^{\boxed{ク}}+\boxed{ケ}}\left(\pi\sin\frac{\pi}{2}x-\boxed{コ}\cos\frac{\pi}{2}x\right)+C$$

である。ここで，$C$ は積分定数である。

(3) $y=e^{-x}f(x)$ のグラフと $x$ 軸，および直線 $x=2n$ ($n$ は正の整数) で囲まれる図形の面積を $T_n$ とすると

$$T_1=\frac{1}{\pi^{\boxed{サ}}+\boxed{シ}}\left(\frac{\pi}{\boxed{ス}}-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}^{\boxed{タ}}}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\boxed{チ}\pi-\boxed{ツ}}{\left(\pi^{\boxed{テ}}+\boxed{ト}\right)\left(\boxed{ナ}^{\boxed{ニ}}-\boxed{ヌ}\right)}$$

である。

(下　書　き　用　紙)