

# 東京医科歯科大学

令和 2 (2020) 年度入学者選抜個別(第 2 次) 学力検査問題

## 数 学

(医 学 科)

### 注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子は、全部で 7 ページあります。
3. 解答用紙は、問題冊子と別に印刷されているので、誤らないように注意しなさい。
4. 解答用紙には、必ず解答の過程と結果を記入しなさい。
5. 解答は、必ず解答用紙の点線より左に記入しなさい。
6. 下書は、問題冊子の余白を使用しなさい。ただし、切り離してはいけません。
7. 各解答用紙には、受験番号欄が 2 か所ずつあります。それぞれ記入を忘れないこと。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、机上に置き、持ち帰ってはいけません。この冊子は持ち帰りなさい。
9. 落丁または印刷の不鮮明な箇所があれば申し出なさい。

下 書 用 紙 (切り取ってはいけない)

1  $N$  を自然数として、表と裏が等確率で出るコインを  $N$  回投げる試行を考え、この試行の結果によって関数  $f(x)$  を次のように定義する。

1.  $x \leq 0$  のとき、 $f(x) = 0$

2.  $x$  が  $N$  以下の自然数  $n$  に等しいとき、 $n$  回目に

表が出れば  $f(n) = f(n - 1) + 1$

裏が出れば  $f(n) = f(n - 1) - 1$

3.  $x$  が  $0 < x < N$  を満たし、かつ自然数でないとき、 $n - 1 < x < n$  を満たす

自然数を  $n$  として、 $f(x) = (x - n + 1) f(n) + (n - x) f(n - 1)$

4.  $x > N$  のとき、 $f(x) = f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)  $N = 8$  のとき、試行の結果が「表, 表, 裏, 裏, 表, 裏, 裏, 裏」の順となったとき、 $f(x)$  のグラフを描け。

(2) 自然数  $N$  と 0 以上の整数  $k$  について、 $f(x)$  が極値をとる点の個数が  $k$  となる確率を  $P(k)$  とする。 $P(k)$  を  $N, k$  を用いて表せ。

(3) 自然数  $N$  と 0 以上の整数  $k$  について、 $f(x)$  が極大となる点の個数が  $k$  となる確率を  $Q(k)$  とする。 $Q(k)$  を  $N, k$  を用いて表せ。

(4) (3) の  $Q(k)$  について  $\sum_{k=0}^N k Q(k)$  を  $N$  を用いて表せ。

2  $a$  を正の実数,  $m$  を実数とし,  $k_1 = m + \sqrt{m^2 + 1}$ ,  $k_2 = m - \sqrt{m^2 + 1}$  とする。さらに,  $C_0, C_1, C_2$  を複素数平面上でそれぞれ

$$C_0 : (m + i)z + (m - i)\bar{z} + 2a = 0$$

$$C_1 : (k_1 + i)z + (k_1 - i)\bar{z} - 2ak_1^2 = 0$$

$$C_2 : (k_2 + i)z + (k_2 - i)\bar{z} - 2ak_2^2 = 0$$

を満たす点  $z$  の集合とする。ここで,  $i$  は虚数単位,  $\bar{z}$  は  $z$  と共役な複素数を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $C_0, C_1, C_2$  がいずれも直線であることを示せ。
- (2)  $C_0$  と  $C_1$  の共有点を  $P_1$  とし,  $m$  を変化させたとき  $P_1$  が描く曲線を  $F_1$  とする。 $F_1$  はどのような曲線か。 $a$  を用いて答えよ。
- (3)  $m > 0$  のとき,  $C_1, C_2$  と虚軸で囲まれる領域の面積を  $T$  とし, (2) の  $F_1$  と  $C_1, C_2$ , 虚軸で囲まれる領域の面積を  $S$  とする。 $\frac{T}{S}$  が  $a$  によらず一定であることを示し, その極限值  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T}{S}$  を求めよ。

**3**  $t$  を正の実数とし、 $xyz$  空間において、7つの点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $P(t, 1, 0)$ ,  $Q(0, t, 1)$ ,  $R(1, 0, t)$  をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $t = 1$  のとき、四面体  $OPQR$  の体積を求めよ。
- (2)  $\triangle PQR$ ,  $\triangle APR$ ,  $\triangle BQP$ ,  $\triangle CRQ$  および  $xy$  平面,  $yz$  平面,  $zx$  平面で囲まれる領域の体積を  $V_1$  とする。 $V_1$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $O$  を中心とし、 $OP$  を半径とする球の体積を  $V_2$  とする。 $t$  を変化させるとき、 $\frac{V_1}{V_2}$  が最大となる  $t$  の値を求めよ。

下 書 用 紙 (切り取ってはいけない)

下 書 用 紙 (切り取ってはいけない)

下 書 用 紙 (切り取ってはいけない)