札幌医科大学　一般

数学問題紙

令和２年２月25日

自　　11：00

至　　12：40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は１から５までの５ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの４枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙（４枚）は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

◇M2(728—14)

1 次の各問に答えよ.

(1) 629 と 481 の最大公約数を d とする. x と y に関する方程式

$$629x + 481y = d$$

を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ.

(2) 次の条件により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) 5人がA, B, C, D, Eの5部屋に入るとき,「1人だけの部屋が存在しない」確率を求めよ.

2 nを自然数とする．関数$f_n(x)$を$f_n(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos t+\sin 2nt)^2\,dt$で定義する．また，各$n$に対して$f_n(x)$の最小値を$a_n$とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 nt\,dt$および$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2nt\,dt$を求めよ．

(2) a_nをnを用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ．

3 a と b は $0 < a < b$ をみたす定数とする．座標平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ -a)$ と直線 $\ell : y = a$ に対して，点Aからの距離と直線 ℓ からの距離の和が $2b$ である点の軌跡を C とする．

(1) 軌跡 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$y \geqq a$ のとき，y を定数 a，b を含む x の式で表せ．

(2) 軌跡 C の概形を図示せよ．

(3) 軌跡 C で囲まれる部分を y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を a と b を用いて表せ．

4 複素平面上において原点Oを中心とする半径1の円を C とする．円 C の外部の点 $\mathrm{P}(w)$ を通る円 C の2本の接線の接点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とする．直線OPと直線ABの交点をQとし，Qの実軸に関して対称な点を $\mathrm{R}(z)$ とする．

(1) z を w を用いて表せ．

(2) $z=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{i}{2}$ のときの w の値をそれぞれ γ，δ とする．点 $\mathrm{R}(z)$ が点 $\dfrac{1}{2}$ と点 $\dfrac{i}{2}$ を結ぶ直線上にあるとき，点 $\mathrm{P}(w)$ は原点O，点 γ，点 δ の3点を通る円上にあることを示せ．

(3) 次の①と②をつなげた曲線を考える．

① 点 $\dfrac{1}{2}$ と点 $\dfrac{i}{2}$ を結ぶ線分

② 円 $|z|=\dfrac{1}{2}$ 上で，点 $\dfrac{i}{2}$ と点 $\dfrac{1}{2}$ を端点とし，中心角が $\dfrac{3\pi}{2}$ の弧

点 $\mathrm{R}(z)$ がこの曲線上を点 $\dfrac{1}{2}$ から出発し，①を通って点 $\dfrac{i}{2}$ へ，次に②を通って点 $\dfrac{1}{2}$ に戻ってくるときの点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡を図示せよ．