

令和 2 年度 数 学

問題の選択方法

以下に示す問題を解答すること。

| 学 部 | 学科等 | 解答する問題 |
|------|---|-----------|
| 教育学部 | 学校教育教員養成課程 (「数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B」受験者) | ① ② ③ ④ |
| | 学校教育教員養成課程 (「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B」 受験者) | ① ③ ④ ⑥ |
| 理学部 | 理学科 数学受験 | ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ |
| 医学部 | 医学科 | ③ ④ ⑥ ⑦ ⑧ |
| 工学部 | 工学科 理型入試 (社会デザインコースを除く) | ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ |
| | 工学科 文理型入試 (社会デザインコース) | ① ② ③ ④ |
| 農学部 | 全学科 | ① ② ③ ④ |

注 意 事 項

- 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- この問題冊子は、9ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 解答は、すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。やむをえない場合は、解答用紙の裏も使用してよい。ただし、裏を使用する場合は、その旨を解答用紙の表に明記し、裏に書かれた指示に従って解答すること。
- 問題冊子の余白は下書きに使用してよい。
- 解答用紙はすべて机の上に出しておくこと。机の中に入れてはいけません。

1

(教育学部, 工学部工学科文理型入試(社会デザインコース), 農学部)

以下の問いに答えよ。

- (1) 3個のさいころを同時に投げるとき, 少なくとも2個のさいころの目が一致する確率を求めよ。

- (2) 座標平面において, 連立不等式

$$x + y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq y$$

の表す領域を図示せよ。

- (3) 不等式 $4^x + 2^{x+2} - 32 \leq 0$ を解け。

- (4) 実数 θ が $0 < \theta < 2\pi$, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ を満たすとき, $\sin \frac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

- (5) 最大公約数が24で, 最小公倍数が432であるような2つの自然数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。ただし, $a \leq b$ とする。

数学の試験問題は次に続く。

2

(教育学部(「数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B」受験者), 工学部工学科文理型入試(社会デザインコース), 農学部)

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l とする。ただし, a は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 $y = x^2$, 接線 l , および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
- (3) 接線 l に垂直で, 放物線 $y = x^2$ に接する直線を m とする。
 - (i) 直線 m の方程式, および直線 m と放物線 $y = x^2$ の接点 P の座標を求めよ。
 - (ii) 接線 l と直線 m の交点 Q の座標を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

3

(教育学部, 理学部, 医学部, 工学部, 農学部)

原点を O とする座標空間に 2 点 $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 2, 2)$ がある。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{a} , \vec{b} の大きさ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, および内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。
- (3) 点 C は次の条件 (a), (b), (c) をすべて満たすとする。
 - (a) 直線 OC は, 3 点 O , A , B で定まる平面に垂直である。
 - (b) 線分 OC の長さは $5\sqrt{2}$ である。
 - (c) ベクトル \overrightarrow{OC} とベクトル $\vec{e} = (1, 0, 0)$ とのなす角は, 0 以上, $\frac{\pi}{2}$ 以下である。

また, $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して, 線分 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を D とする。

- (i) 点 C の座標を求めよ。
- (ii) 点 D の座標を t を用いて表せ。
- (iii) $\triangle OCD$ の面積を最小にする t の値を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

4

(教育学部, 理学部, 医学部, 工学部, 農学部)

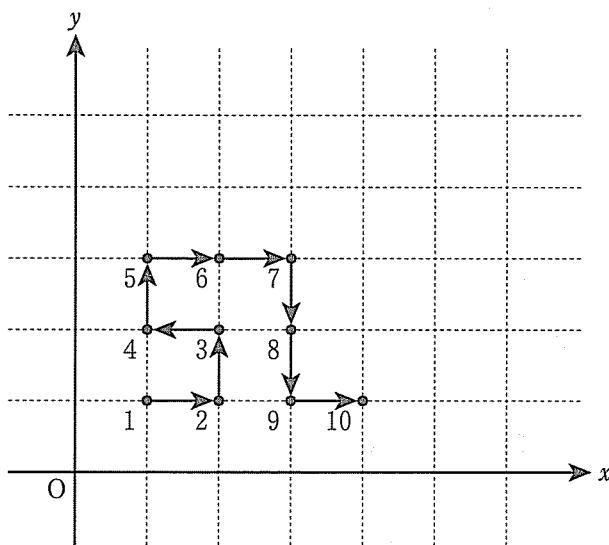
座標平面上で x 座標, y 座標がともに整数である点 (x, y) のことを格子点という。以下において, 格子点から格子点へと移動していく点 P を考える。

格子点 (x, y) にいる点 P は, 1 回の移動で, 格子点 $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y-1)$ のいずれかに移る。これらの移動をそれぞれ, 右への移動, 左への移動, 上への移動, 下への移動という。

P は, はじめ格子点 $(1, 1)$ にあり, 次の規則(★)に従って別の格子点へ移動していく。

(★) P は格子点 $(1, 1)$ から右へ 1 回, 上へ 1 回, 左へ 1 回, 上へ 1 回, 右へ 2 回, 下へ 2 回, 順に移動し, 格子点 $(3, 1)$ にたどり着く。以降同様に, $m = 2, 3, 4, \dots$ に対して, P は格子点 $(2m-1, 1)$ から右へ 1 回, 上へ $(2m-1)$ 回, 左へ $(2m-1)$ 回, 上へ 1 回, 右へ $2m$ 回, 下へ $2m$ 回, 順に移動し, 格子点 $(2(m+1)-1, 1)$ にたどり着く。

次に, x 座標, y 座標がともに自然数である格子点に番号を付ける。まず, P がはじめにいた格子点 $(1, 1)$ に番号 1 番を付ける。その後, P が通った格子点に, 順に番号 2 番, 3 番, 4 番, \dots を付ける。次の図は, P の格子点 $(1, 1)$ から格子点 $(4, 1)$ までの移動と, 番号 1 番から 10 番までの番号付けを表したものである。



以下の問いに答えよ。

(1) 次の に適する数または式を、解答用紙の指定のところに記入せよ。

(i) 格子点 $(5, 3)$ に付けられた番号は ア 番である。

(ii) n を自然数とする。格子点 $(2n, 1)$ に付けられた番号は イ 番であり、格子点 $(1, 2n + 1)$ に付けられた番号は ウ 番である。

(2) 自然数 n に対して、格子点 (n, n) に付けられた番号を a_n 番とする。

(i) a_n を n を用いて表せ。

(ii) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

(3) 番号 2020 番が付いた格子点の座標を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

5

(理学部, 工学部工学科理型入試(社会デザインコースを除く))

以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において, 連立不等式

$$x + y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq y$$

の表す領域を図示せよ。

- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x} + 3x)$ を求めよ。

- (3) 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ があり, x 座標および y 座標が時刻 t の関数として

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t$$

で与えられているとする。時刻 $t = \frac{\pi}{12}$ における点 P の速度 \vec{v} および加速度 \vec{a} を求めよ。

- (4) 不定積分 $\int x \cos(x^2) dx$ を求めよ。

- (5) さいころを4回続けて投げる。出た目の和が7以上である確率を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。



6

(教育学部〔数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B〕受験者)、理学部、医学部、工学部工学科理型入試(社会デザインコースを除く))

原点を O とする座標平面において、曲線 $y = x(\log x)^2$ ($x > 0$) を C とする。
 C の変曲点を P とし、直線 OP と C との交点のうち、 P と異なる点を Q とする。
また、 C 上の点 Q における接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x(\log x)^2$ ($x > 0$) の導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ。

(2) 点 P および点 Q の座標を求めよ。

(3) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(4) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\int x \log x \, dx$

(ii) $\int x(\log x)^2 \, dx$

(5) 曲線 $y = x(\log x)^2$ ($x \geq 1$)、接線 ℓ 、および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

7

(理学部, 医学部, 工学部工学科理型入試(社会デザインコースを除く))

以下の問いに答えよ。ただし, 0 でない複素数 z に対して, $z^0 = 1$ と定める。

- (1) α を $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha \neq 1$ を満たす複素数とする。このとき, 次の式が成り立つことを証明せよ。

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ および

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められている。また, i を虚数単位とし, $z_n = x_n + iy_n$ とおく。

- (i) $z_{n+1} = \beta z_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす複素数 β を求めよ。

- (ii) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

- (iii) $\sum_{k=1}^n z_k$ の実部を求めよ。

- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

8

(医学部)

関数 $g(x)$ を $g(x) = 8x(1-x)$ で定める。また、自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) を

$$f_1(x) = g(x)$$

$$f_{n+1}(x) = g(f_n(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、関数 $|f_n(x)|$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を a_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a_1 および a_2 を求めよ。
- (2) n が 2 以上の自然数のとき、次の命題 $P(n)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。
 $P(n) : a_n \geq 2$ であり、関数 $y = f_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の値域は $-a_n \leq y \leq 2$ である。
- (3) n が 2 以上の自然数のとき、 a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (4) n が 2 以上の自然数のとき、不等式 $8a_n^2 \leq a_{n+1} \leq 16a_n^2$ が成り立つことを示せ。
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log a_n)}{n}$ を求めよ。

