奈良県立医科大学　後期

令和２年度

試験問題

数　　学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.

2. 試験開始後, 問題冊子, 解答用紙の印刷不鮮明や汚れ, 問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは, 手を挙げて監督者に知らせよ.

3. 監督者の指示に従い, 解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ. 受験番号欄は合計４箇所ある. 受験番号未記入の解答用紙は採点されない.

4. 解答は所定の解答欄に記入せよ. 不足する場合は裏面に解答してもよい. 解答用紙はどのページも切り離してはならない.

5. 試験時間は２時間である.

6. 試験終了後, 問題冊子は持ち帰ってよい.

－余白－

(このページに問題はありません)

1 二つの正整数 a, b は互いに素であるとする．このとき，

$$ax + by = ab - a - b$$

を満たす 0 以上の整数 x, y は存在しないことを証明せよ．

2 α は $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする．O は xy 平面の原点とし，xy 平面上の点 $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0$ が与えられたとき，以下の漸化式により，点 $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n (n = 1, 2, \cdots)$ を定める．

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_n} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}_n} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} \quad (n = 0, 1, 2 \cdots) \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}_n} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n} \end{cases}$$

(1) $\mathrm{A}_0(\cos 0, \sin 0), \mathrm{B}_0(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}), \mathrm{C}_0(\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3})$ とする．一般の 0 以上の整数 n に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}|, |\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}|, |\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n}|$ を n を用いて表せ．さらに，

$$S(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} |\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}|$$

として，

$$\lim_{\alpha \to 0} S(\alpha)$$

を求めよ．

(2) $a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y$ を実数定数とし，$\mathrm{A}_0(a_x, a_y), \mathrm{B}_0(b_x, b_y), \mathrm{C}_0(c_x, c_y)$ とする．点 P の x 座標の値，y 座標の値をそれぞれ x_P, y_P で表すことにする．各 $n \geqq 0$ に対して，$r_n = \mathrm{Max}(x_{\mathrm{A}_n}, x_{\mathrm{B}_n}, x_{\mathrm{C}_n}) - \mathrm{Min}(x_{\mathrm{A}_n}, x_{\mathrm{B}_n}, x_{\mathrm{C}_n})$ とおく．(ただし，Max, Min はそれぞれ，最大値，最小値を表す．)

もし，ある n について，不等式

$$x_{\mathrm{A}_n} \leqq x_{\mathrm{B}_n} \leqq x_{\mathrm{C}_n}$$

が満たされると仮定する．このとき，不等式 $r_{n+1} \leqq r_n \mathrm{Max}(\alpha, 1-\alpha)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) (2) において，

$$\lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{A}_n} = \lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{B}_n} = \lim_{n\to\infty} x_{\mathrm{C}_n}, \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{A}_n} = \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{B}_n} = \lim_{n\to\infty} y_{\mathrm{C}_n}$$

となることを証明し，これらの極限値を求めよ．

3 正整数 n に対して, x, y, z についての整式 F_n を次のように定義する:

$$F_n = (x^n + y^n + z^n)(x^n y^n + y^n z^n + z^n x^n) - x^n y^n z^n$$

(1) F_1 を因数分解せよ.

(2) n が奇数ならば, F_n は F_1 で割り切れることを証明せよ.

4 数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ を $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ と記すことにする. 数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ が周期数列であるとは, ある正整数 q が存在し, 0 以上の任意の整数 n に対して等式 $a_{n+q} = a_n$ が成り立つこととする. このとき, q を周期数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の周期という. 二つの数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ と $\{b_n\}_{n=0,1,\cdots}$ とが等しいとは, 0 以上の任意の整数 n に対して, $a_n = b_n$ が成り立つこととする.

(1) 周期数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ が与えられたとき, 正整数 p を $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の最小の周期とする. このとき, $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の任意の周期 q は p で割り切れることを証明せよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を周期数列とする. 0 以上の整数 i に対して, 周期数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ を, $a_n^{(i)} = a_{n+i}, n = 0, 1, \cdots$ により定義する. もし, $\{a_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の周期 $p(> 1)$ が素数であり, 関係式 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$ を満たさなければ, p 個の周期数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0,1,\cdots}$ $(i = 0, 1, \cdots, p-1)$ はすべて相異なることを証明せよ.

(3) c を正整数, $p(> 1)$ を素数とする. 周期 p の周期数列 $\{x_n\}_{n=0,1,\cdots}$ で, 0 以上の任意の整数 n について x_n は 1 以上 c 以下の整数であるもの全体のなす集合を S とおく. S の要素の個数を求めよ. またこれを用いて, $c^p - c$ は p の倍数であることを証明せよ.

－余白－

(このページ以降に問題はありません)