大阪医科大学

令和 2 (2020) 年度入学試験問題 (後期)

数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔１〕 nを２以上の自然数とする。１からnまでの番号が１つずつ書かれたn枚のカードをよく混ぜ，１枚取り出し，それを戻さずにもう１枚取り出す。

(1) １枚目に取り出したカードの番号より２枚目の番号の方が小さい確率を求めよ。

(2) １枚目に取り出したカードの番号より２枚目の番号の方が小さいという条件の下で，２枚目の番号が１である確率を求めよ。

〔２〕 ２つの曲線$C_1 : y = x^2 - \dfrac{3}{2}$と$C_2 : y^2 = -2x + \dfrac{9}{4}$を考える。

(1) C_1，C_2の共有点をすべて求めよ。

(2) ２つの領域$y \geqq x^2 - \dfrac{3}{2}$と$y^2 \leqq -2x + \dfrac{9}{4}$の共通部分$W$の面積$S$を求めよ。

〔３〕 a，bを正の整数とし，関数$f(x)$を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \dfrac{1}{x^b} & (x \neq 0 \text{のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

(1) $f(x)$は$x = 0$で連続であることを示せ。

(2) $a \geqq 2$のとき$f(x)$はすべてのxで微分可能であることを示し，導関数$f'(x)$を求めよ。

(3) $a \geqq b + 3$のとき$f'(x)$は$x = 0$で微分可能であることを示し，$f''(0)$の値を求めよ。

〔４〕 p，qを素数とし$p \neq q$とする。

(1) $p^x = q^y$を満たす有理数x，yを求めよ。

(2) $\log_p q$は無理数であることを示せ。

(3) a，b，c，dを０でない有理数とし，$m = p^a q^b$，$n = p^c q^d$とする。$\log_m n$が有理数であるためのa，b，c，dの条件を求め，そのときの$\log_m n$の値をa，b，c，dを用いて表せ。

〔５〕 ２つの合同な直円錐U，Vよりなる立体Wがある。U，Vは頂点Ｏを共有し，それぞれの底面の円A，Bはただ１点Ｍを共有していて母線ＯＭのみがU，Vの共通部分である。また，A，Bの中心をＡ，Ｂとすると，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$であり，$\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{BOM} = \alpha \ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}\right)$である。
この立体Wを水平面π上に横たえる。πとU，Vそれぞれの共通部分のＯを通る直線をl，mとする。Ａ，Ｂからl，mに下ろした垂線の足を$\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$とし，$\angle\mathrm{A_1OB_1} = 2\theta$とする。
なお，以下の問いに答える際に，４点Ｏ，Ａ，Ｍ，Ｂが同一平面上にあることと，$\mathrm{AA_1}$，$\mathrm{BB_1}$が水平面πに垂直であることは証明しなくて良い。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$を$\alpha$を用いて表せ。

(2) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$を$\alpha$，$\theta$を用いて表せ。

(3) $\sin\theta$をαで表せ。