理科系　　令和２年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　　　学

(情—自然，コン・理・医・工・農)

2月26日(水) 10：00—12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚，答案紙4枚，数学公式集3枚)である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問　題　紙

1 双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とする。以下の問に答えよ。

(1) 直線 $ax-by=1$ が C_1，C_2 の両方と1点ずつで交わるための a，b の条件を求めよ。

(2) a，b は(1)で求めた条件をみたすものとする。点 $A(a,\ b)$ をとり，直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする。このとき△APQ の面積 S を a，b を用いて表せ。

(3) 面積 S の最小値を求めよ。また，その最小値をとるための a，b の条件を求めよ。

2 3つの数 2，m^2+1，m^4+1 が相異なる素数となる正の整数 m が1つ固定されているものとする。以下の問に答えよ。

(1) 3つの数 2，m^2+1，m^4+1 のうち，1つを a とし，残りの2つを b，c とする。このとき $a^2<bc$ となる a をすべて求めよ。

(2) 正の整数 x，y が $(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$ をみたしているとき x，y を求めよ。

3 以下の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第2次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x)>0$ をみたしているとする。区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2) $f(x)$ を(1)の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

を示せ。

(3) 関数 $g(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x)<0$ をみたしているとする。このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

を示せ。

4 2名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i) 正方形の4つの頂点を反時計回りに A，B，C，D とする。両者はコマを1つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマは A，後攻の持ちゴマは C に置いてあるとする。

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。出た目を3で割った余りが0のときコマは動かさない。また余りが1のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが2のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) p_n を求めよ。

(3) このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち2以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。

1 理科系

受	験	番	号	

32 数 学

答 案 紙

受験番号					

1 （解答欄）

答　案　紙

受験番号					

2 （解答欄）

3

理科系

受	験	番	号	

32 数学

答　案　紙

受験番号					

3 （解答欄）

4 理科系

受	験	番	号	

32 数 学

答 案 紙

受験番号					

4 （解答欄）

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図 形 と 式）

6. 数直線上の2点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点(x_1, y_1)と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点(x_1, y_1, z_1)と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点(x_1, y_1)における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点(x_1, y_1)における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$の解がα，βのとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$の解がα，β，γのとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + l) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n - 1)d\right\}$，$(l = a + (n - 1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \neq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　　積　　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$のとき $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

32. $x = g(t)$のとき $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

33. $\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

34. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

35. $\displaystyle\int \log x\, dx = x\log x - x + C$

36. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

38. 曲線の長さ：$\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t)$，$y = y(t)$，$a = x(\alpha)$，$b = x(\beta))$

（順 列・組 合 せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

42. 期待値：$E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたすとする。