令和２年度　入学者選抜学力検査問題

数　　学（理系β）

数学Ⅰ，数学Ａ
数学Ⅱ，数学Ｂ
数学Ⅲ

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で４題あります。また，解答用紙は４枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に２箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 裏面その他に解答を記入した場合，その部分は採点の対象となりません。
7. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔1〕 (配点 50) 2つの袋 A，B があり，はじめに袋 A には赤玉 5 個，袋 B には白玉 5 個が入っている。n は 1 以上 6 以下の整数とし，次の操作 T をくり返す。

操作 T「袋 A と袋 B から玉を 1 個ずつ取り出す。1 個のさいころを投げ，n 以下の目が出た場合は取り出した玉をそれぞれ元の袋に戻し，そうでない場合は取り出した玉をそれぞれ元の袋と異なる袋に入れる。」

このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $n = 1$ とする。操作 T を 2 回くり返した後，袋 A に赤玉が 5 個入っている確率を求めなさい。

(2) $n = 1$ とする。操作 T を 3 回くり返した後，袋 A に赤玉が 5 個入っている確率を求めなさい。

(3) 操作 T を 2 回くり返した後，袋 A に赤玉が 4 個と白玉が 1 個入っている確率を p_n とする。p_n の最大値と，そのときの n の値を求めなさい。

〔2〕 （配点 50） a, b を正の実数とする。xy 平面において，原点$(0,\ 0)$で x 軸に接する直径 a の円を C_1，点$(1,\ 0)$で x 軸に接する直径 b の円を C_2 とする。ただし，C_1 と C_2 の中心はともに直線 $y = 0$ の上側にあるとする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための必要十分条件を a, b の式で表しなさい。

(2) c を正の実数とするとき，

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) + 4 < 0$$

は，C_1 と C_2 が直線 $y = \dfrac{1}{c}$ の上側と下側に 1 つずつ交点をもつための必要十分条件であることを示しなさい。

〔3〕（配点 50） α，β を $0<\alpha<\beta$ を満たす実数とし，$k=\alpha+\beta$，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とする。曲線 $y=f(x)\ (x \leqq k)$ を C，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ を通り x 軸に平行な直線を l，直線 $x=k$ を m とする。C，l，m のうち 2 つ以上で囲まれたすべての部分の面積の和を $S(p)$ とおく。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $0 \leqq p \leqq \dfrac{k}{2}$ のとき，$S(p)$ を p と k を用いて表しなさい。

(2) 点 P が曲線 C 上を動くとき，$S(p)$ の最小値とそのときの p の値を k を用いて表しなさい。

〔4〕 (配点 50) 2 次方程式 $3x^2+\sqrt{3}\,x+1=0$ の 2 つの解を α, β とし，一般項が $a_n=\alpha^n+\beta^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めなさい。

(2) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$a_{n+3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(3) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように表されることを示しなさい。

$$S_n=-\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}a_{n+1}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}a_n+\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束することを示し，その和を求めなさい。