令 和 2 年 度

数　　学

問 題 冊 子

[1] (1) 数直線上の閉区間 $[0,1]$ を I_0 とし，点 $\mathrm{A}(a)$ を $a>1$ となるようにとる．このとき，A を含む閉区間 I に対して，不等式

$$\frac{L(I\cap I_0)}{L(I)} \leqq \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ． さらに，等号成立は $I=[0,a]$ のときのみであることを示せ．ただし，I は数直線上の異なる 2 点を両端とし，$L(I)$, $L(I\cap I_0)$ はそれぞれの区間の両端の間の距離を表し，$I\cap I_0$ が 1 点または空集合のときは $L(I\cap I_0)=0$ とする．

(2) 座標平面上で，$(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ を頂点とする正方形を Q_0 とし，点 $\mathrm{P}(a,b)$ を $2\leqq a$, $1\leqq b\leqq a$ となるようにとる．各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形 Q が P を含むとき，不等式

$$\frac{S(Q\cap Q_0)}{S(Q)} \leqq \frac{1}{a^2}$$

が成立することを，次の各場合について示せ．

(i) Q の辺の長さが a 以上のとき，

(ii) Q の辺の長さが a より小さく，$a-1$ より大きいとき，

(iii) Q の辺の長さが $a-1$ 以下のとき．

さらに，等号が成立する Q をすべて求めよ．ただし，$S(Q)$, $S(Q\cap Q_0)$ はそれぞれ Q, $Q\cap Q_0$ の面積を表し，$Q\cap Q_0$ が 1 点，線分，または空集合のときは $S(Q\cap Q_0)=0$ とする．

[2] 複素数 α, β についての等式

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$$

を考える．

(1) $|\alpha|=1$, $|\beta|=1$ のとき，この等式が成立することを示せ．

(2) この等式をみたす α, β については，$\alpha+\beta=0$, または $|\alpha\beta|=1$ となることを示せ．

(3) 極形式で $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表されているとき，この等式をみたす β を求めよ．

[3] 座標平面上に曲線 $K : y = x^2$ があり，半径 1 の円 C が下から K に接している．K と C の接点 P の座標を (t, t^2) とし，C の中心の座標を (u, v) とする．

(1) P を通り，かつ P における K の接線と直交する直線の方程式を求めよ．

(2) u, v を t の関数として表せ．

(3) C が x 軸に接するときの t をすべて求めよ．

[4] (1) 自然数 k に対して，3^k を約数にもつ自然数は 2 から 30 までに何個あるか．

(2) $30! = 6^d \cdot l$ となる自然数 d を求めよ．ただし，l は 6 で割り切れない自然数である．

(3) n を自然数とし，p を素数とする．$p^n! = p^e \cdot m$ となる自然数 e を求めよ．ただし，m は p で割り切れない自然数である．

(4) 自然数 n に対して，自然数 $d(n), e(n)$ を $30^n! = 6^{d(n)} \cdot l = 5^{e(n)} \cdot m$ と定める．ただし，l, m はそれぞれ 6, 5 で割り切れない自然数である．このときの極限 $\lim_{n \to \infty} \dfrac{d(n)}{e(n)}$ を求めよ．