2020年度　北海道大学　一般（前期）

R－2　Ⓐ

数　　学

（数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B）

9：00～11：00

注　　意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。
3. 解答用紙は

解答用紙番号		解答用紙番号	
数学0－1	（問$\boxed{1}$用），	数学0－2	（問$\boxed{2}$用），
数学0－3	（問$\boxed{3}$用），	数学0－4	（問$\boxed{4}$用），
数学0－5	（問$\boxed{5}$用）の5枚である。		

4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
5. **受験番号および座席番号（上下2箇所）は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。**
6. 各問に対する解答は，それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 下書き用紙は回収しない。

解答上の注意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

◇M10(256—100)

1 三角形ABCについて

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形ABCの外接円の中心をOとし，直線AOと外接円とのA以外の交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。

(3) 直線APと直線BCの交点をDとするとき，線分ADの長さを求めよ。

2 座標平面上の2点 $\left(\dfrac{1}{16}, 0\right)$, $\left(0, \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 ℓ を考える。

(1) ℓ 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし，格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。

(2) ℓ 上の格子点のうち，原点との距離が最小となる点をAとする。また，ℓ 上のA以外の格子点のうち，原点との距離が最小となる点をBとする。さらに，Aの x 座標とBの y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点をCとする。三角形ABCの内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

3 n を2以上の自然数とする。1個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が3となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が1となる確率を n の式で表せ。

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最小公倍数が20となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{4}$ αを$0 < \alpha < 1$を満たす実数とし，$f(x) = \sin \dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列$\{a_n\}$が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数nに対して，$0 < a_n < 1$かつ$a_{n+1} > a_n$が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき，すべての自然数nに対して，$b_{n+1} < b_n$が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ および (2) で定めた$\{b_n\}$に対して $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$ aを正の定数とする。微分可能な関数$f(x)$はすべての実数xに対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)}\,dt = ax$$

さらに，$f(0) = \dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$を求めよ。

(2) 曲線$y = f(x)$とx軸および2直線$x = 0$, $x = 1$で囲まれる図形の面積$S(a)$を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ。