鹿児島大学　前期

数　　学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，黒板等に掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し，学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

30年度

1 次の各問いに答えよ。

(1) $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{CA}=\sqrt{3}$ のとき，三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(2) $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\sin(x-y)$ を示せ。

(3) p を素数とするとき，$1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす自然数 k に対して，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

2 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=4$ の交点を A，B とする。点 P が曲線 $y=x^2$ 上を $-2<x<2$ の範囲で動くとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 三角形 ABP の重心 G の軌跡を求めよ。

(2) (1) で求めた軌跡と直線 $y=4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$ $\boxed{3-2}$ $\boxed{3-3}$ から1題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 数列 $\{a_n\}$ が自然数 $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して関係式

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\cdots\cdots(*)$$

を満たすとき，「数列 $\{a_n\}$ は漸化式(＊)を満たす」という。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 初項と公比がともに $r(\neq 0)$ である等比数列で漸化式(＊)を満たす数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。ただし，$b_1>c_1$ とする。

(2) 二つの数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$ がともに漸化式(＊)を満たすとき，二つの実数 k,l に対して $f_n=kd_n+le_n$ で定められる数列 $\{f_n\}$ も漸化式(＊)を満たすことを示せ。

(3) (1)で得られた数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ と二つの実数 k,l に対して，$a_n=kb_n+lc_n$ とおくとき $a_1=21$，$a_2=57$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3-2}$ 三角形ABCとその内部に点Oがあり，正の実数 k,l に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしていると仮定する。さらに直線OAと辺BC，直線OBと辺CA，直線OCと辺ABの交点をそれぞれD，E，Fとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくとき，x を k,l を用いて表せ。さらに $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}$ を k,l を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，y を k,l を用いて表せ。さらに $\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}$ を k,l を用いて表せ。

(3) $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}+\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}+\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}}=1$ を示せ。

3 — 3　1 個のサイコロを投げ，1 の目が出るまでこれを繰り返し行う。ただし，このサイコロ投げを繰り返す最大の回数は N 回とし ($N \geqq 2$)，N 回まで繰り返して 1 の目が出なければ，終了する。このサイコロ投げにおける繰り返し回数を X とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 確率 $P(X=k)$ を，$k<N$ と $k=N$ の場合に分けて求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

4 関数$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x+1}$について，次の各問いに答えよ。ただし，$x \geqq 0$とする。また，$\log(x+1)$は$x+1$の自然対数を表す。

(1) 自然対数の底eに対して，$t \geqq 0$のとき$e^t > \dfrac{t^2}{2}$が成立することを用いて

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

を示せ。

(2) $f(x)$の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ。

(3) 自然数$n=1,\ 2,\ \cdots$に対して正の数a_nを，曲線$y=f(x)$と直線$x=a_n$およびx軸で囲まれた部分の面積がn^2に等しくなるように定める。このa_nを求めよ。

(4) (3)で定まる数列$\{a_n\}$に対して，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$を求めよ。

5 複素数平面上の点zが$|4-3i-iz|=2$を満たすとする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

(1) 点zの全体が表す図形を求めよ。

(2) $|z|$の最大値と最小値を求めよ。

(3) $w=\dfrac{1}{z+1+4i}$とする。点wの全体が表す図形を求めよ。さらに，$|w|$の最小値を与えるwを求めよ。ただし，$z \neq -1-4i$とする。