

数 学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球)
環境科学科)・医学部・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は3ページである。
3. 問題は、 ~ の5題ある。
4. 解答用紙は、 ~ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら、まず、黑板等に掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、解答用紙をマシン目に沿って落ちて着いて丁寧に別々に切り離し、学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ において $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。 $AB = 6$,
 $BC = 5$, $BD = 3$ のとき、辺 AC の長さを求めよ。
- (2) 自然数 n が6と互いに素であるとき、 $n^2 - 1$ が6で割り切れることを示せ。
- (3) xy 平面で次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$|x| \leq y \leq 1 - |x|$$

2 次の各問いに答えよ。

- (1) 整式 $P(x)$ を0でない整式 $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とおく。方程式
 $P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は方程式 $Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解である
ことを示せ。また逆に方程式 $Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解は方程式
 $P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解であることを示せ。
- (2) 整式 $P(x)$, $Q(x)$ を

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1, \quad Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

とおく。方程式 $P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解をすべて求めよ。

3 次の **3—1** **3—2** **3—3** から1題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

3—1 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)によって定める。また α を $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ を満たす正の実数とする。次の各問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ で定める。 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $b_n \geq 1$ となることを示せ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $|b_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\alpha} |b_n - \alpha|$ となることを示せ。
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $|b_n - \alpha| \leq \frac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ。

3—2 四面体OABCを考える。辺OAを1:1に内分する点をPとする。また辺OBを2:1に内分する点をQとして、辺OCを3:1に内分する点をRとする。さらに三角形ABCの重心をGとする。3点P, Q, Rを通る平面と線分OGの交点をKとする。線分OKとKGの長さの比を求めよ。

3—3 次の各問いに答えよ。

- (1) 1個のさいころを10回投げるとき、1または2の目が出る回数 X の期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。
- (2) 確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = \frac{2}{25}x$ ($0 \leq x \leq 5$)で与えられているとき、 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。
- (3) 2つの事象 A, B について、 A と B が独立なら \bar{A} と B も独立であることを示せ。ただし \bar{A} は A の余事象を表す。

4 関数 $f(x) = (\log x)^2 - \log x$ ($x > 0$) を考える。次の各問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす x をすべて求めよ。
- (2) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ。また関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし関数 $y = f(x)$ の増減、凹凸、極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を明示すること。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 次の各問いに答えよ。

- (1) 複素数 z, w について、次の関係が成立することを示せ。ただし複素数 a に対し、 \bar{a} は a と共役な複素数を表す。
 - (a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
 - (b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- (2) 方程式 $z^2 - z + 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。次の各問いに答えよ。
 - (a) α, β を求めよ。さらにそれらを極形式で表せ。
 - (b) $\alpha^{100} + \beta^{100}$ を求めよ。