鹿児島大学　医学部 歯学部
前期

数　学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は11ページである。1ページ～5ページは新教育課程による問題，6ページ～11ページは旧教育課程による問題である。
3. 問題は，それぞれ $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. 解答すべき問題は次のとおりとする。
   (1) 新教育課程履修者(高等学校または中等教育学校後期課程に平成24年4月に入学または進級し，平成27年3月卒業見込みの者)は，新教育課程による問題を解答すること。
   (2) 旧教育課程履修者(上記以外の者)は，新教育課程による問題または旧教育課程による問題のどちらを解答してもよいが，両課程の問題にまたがって解答してはいけない。
6. (1) 新教育課程による問題の $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
   (2) 旧教育課程による問題の $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
7. 「解答始め」の合図があったら，まず，黒板に掲示または板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し，学部名・受験番号・氏名のほか，あなたが新・旧教育課程履修者のどちらなのか，また，新・旧教育課程による問題のどちらを解答するのかを必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
8. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

27年度　◇M5(581—42)

新教育課程による問題

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) SATTUNという6文字を並べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字になるものの総数を求めよ。

(2) 半径 r の円 O′ が半径 $2r$ の円 O に点 P で内接し，さらに円 O′ は円 O の弦 AB に点 Q で接している。線分 PQ の延長が円 O と交わる点を M とする。$\angle \mathrm{PQB} = 60^\circ$ のとき，線分 QM の長さを求めよ。

(3) 1次不定方程式

$$37x + 32y = 1$$

の整数解を1組求めよ。

2 次の各問いに答えよ。

(1) 0でない実数 a, b, c, d が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx,\quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく。ただし, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ とする。このとき, 次の各問いに答えよ。

(a) S と T を m と n を用いて表せ。

(b) $S \geqq 0$, $T \geqq 0$ のとき, $m + n$ が最大となるような m と n を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$ $\boxed{3-2}$ $\boxed{3-3}$ から１題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 数列$\{a_n\}$は$a_1=0$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n\{1+(-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$により定まるものとして，次の各問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4，a_5をそれぞれ求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$b_n=a_{2n-1},\quad c_n=a_{2n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めるとき，一般項b_n，c_nを求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n$を求めよ。

$\boxed{3-2}$ 平面上に三角形ABCと点Oがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\neq 0$$

を満たしていると仮定する。辺BCの中点をM，線分OBの中点をNとし，三角形OBCの外心をPとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) M $\neq$ Pのとき，線分MPと線分OAは平行であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=t\vec{a}$とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{NP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および実数$t$を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{NP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

$\boxed{3-3}$ 整数$n\,(n\geqq 4)$に対し，２枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，２枚とも表が出るか，またはn回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数をX_nとする。確率変数X_nについて，次の各問いに答えよ。

(1) $n-1$以下の自然数kに対して，確率$P(X_n=k)$を求めよ。また，確率$P(X_n>3)$を求めよ。

(2) 確率$P(X_n=n)$をnを用いて表せ。

(3) X_nの平均をE_nとかくとき，$E_{n+1}-E_n$を求めよ。

4 関数$f(x)=xe^{-x}$について，次の各問いに答えよ。ただし，eは自然対数の底であり，$x>0$とする。

(1) $f(x)$の極値を求めよ。また，曲線$y=f(x)$の凹凸を調べ，その概形を描け。ただし，$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$を用いてよい。

(2) $t>0$とするとき，曲線$y=f(x)$とx軸，および直線$x=t$で囲まれる部分の面積$g(t)$を求めよ。

(3) $t>0$とするとき，曲線$y=f(x)$とx軸，および二つの直線$x=t$と$x=t+1$で囲まれる部分の面積$h(t)$が最大となるようなtの値を求めよ。

5 次の各問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

(1) 方程式$z^4=-1$を解け。

(2) αを方程式$z^4=-1$の解の一つとする。複素数平面に点βがあって$|z-\beta|=\sqrt{2}\,|z-\alpha|$を満たす点$z$全体が原点を中心とする円$C$を描くとき，複素数$\beta$を$\alpha$で表せ。

(3) 点zが(2)の円C上を動くとき，点iとzを結ぶ線分の中点wはどのような図形を描くか。

旧教育課程による問題

1 次の各問いに答えよ。

(1) SATTUN という6文字を並べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字になるものの総数を求めよ。

(2) 半径 r の円 O′ が半径 $2r$ の円 O に点 P で内接し，さらに円 O′ は円 O の弦 AB に点 Q で接している。線分 PQ の延長が円 O と交わる点を M とする。$\angle \mathrm{PQB} = 60^\circ$ のとき，線分 QM の長さを求めよ。

(3) x の整式 $f(x)$ に関する性質 P と Q をそれぞれ

$$P : f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$Q : f(1) = 0 \text{ かつ } f(3) = 0$$

とするとき，次の(a)から(d)の中で正しいものを選び，それが正しい理由を述べよ。

(a) P は Q の必要十分条件である。

(b) P は Q の十分条件であるが必要条件でない。

(c) P は Q の必要条件であるが十分条件でない。

(d) P は Q の必要条件でも十分条件でもない。

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 0でない実数 a, b, c, d が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx,\quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく。ただし, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ とする。このとき, 次の各問いに答えよ。

(a) S と T を m と n を用いて表せ。

(b) $S \geqq 0$, $T \geqq 0$ のとき, $m + n$ が最大となるような m と n を求めよ。

3 数列$\{a_n\}$は$a_1 = 0$，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n\{1 + (-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
により定まるものとして，次の各問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4，a_5をそれぞれ求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$b_n = a_{2n-1},\ c_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項b_n，c_nを求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n$を求めよ。

4 関数$f(x) = xe^{-x}$について，次の各問いに答えよ。ただし，eは自然対数の底であり，$x > 0$とする。

(1) $f(x)$の極値を求めよ。また，曲線$y = f(x)$の凹凸を調べ，その概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$を用いてよい。

(2) $t > 0$とするとき，曲線$y = f(x)$とx軸，および直線$x = t$で囲まれる部分の面積$g(t)$を求めよ。

(3) $t > 0$とするとき，曲線$y = f(x)$とx軸，および二つの直線$x = t$と$x = t + 1$で囲まれる部分の面積$h(t)$が最大となるようなtの値を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の $\boxed{5-1}$ $\boxed{5-2}$ $\boxed{5-3}$ $\boxed{5-4}$ から1題を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{5-1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ となるような点$(x,\ y)$が2つ以上あることを示せ。

(2) aとkを実数とする。$\begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるような原点以外の点$(x,\ y)$があるときaをkを用いて表せ。

(3) nを自然数とする。等式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす点$(x,\ y)$が描く図形の方程式を求めよ。

$\boxed{5-2}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 原点Oを中心とし半径がrの円をy軸を基準とし，x軸方向にa倍してできる楕円の焦点を求めよ。ただし，$a > 0$とする。

(2) θが$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$かつ$\cos\theta \neq 0$の範囲で変化するとき，放物線
$y = x^2 - \dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}x + \dfrac{2 + \sin 2\theta}{\cos^2\theta}$ の頂点の描く曲線の方程式を求めよ。

(3) 半径3の円Cの中心は，はじめ$(3,\ 3)$にあり，C上の定点PはCとy軸との接点にある。この位置からCがx軸上を正の方向に滑らずに転がり，角θだけ回転したときの，点Pの座標$(x,\ y)$をθを用いて表せ。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$とする。

5 ― 3　整数 $n\,(n \geqq 4)$ に対し，２枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，２枚とも表が出るか，または n 回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする。確率変数 X_n について，次の各問いに答えよ。

(1) $n-1$ 以下の自然数 k に対して，確率 $P(X_n = k)$ を求めよ。また，確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を n を用いて表せ。

(3) X_n の平均を E_n とかくとき，$E_{n+1} - E_n$ を求めよ。

5 ― 4　ある病気に対して投与する薬の効果の有無を調べたい。薬を投与し，効果有と判断される比率は p であるとする。この病気を持った患者から無作為に n 人を選び，薬を投与したとき，i 番目の患者に薬の効果が認められれば 1 とし，認められなければ 0 とする確率変数を X_i とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の平均，および分散を求めよ。

(2) この病気を持った患者から無作為に 400 人を選び，薬を投与したところ 320 人に薬の効果が認められた。このとき，母比率 p の信頼度 95 % の信頼区間を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ。ただし，標本の大きさ 400 は十分大きい数とみなせるとし，また確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，$P(Z < -1.96) = 0.025$ が成り立つとする。