

鹿児島大学 医学部 歯学部

前期

# 数 学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

## 注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子には、問題文のページが6ページある。
3. 学部名と受験番号及び氏名を、必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は、所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は、 ～  の5題ある。
7. 解答用紙は、 ～  のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
8.  は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

- (1) 三角形 ABC において辺 AB 上に点 D を，辺 AC 上に点 E をとり，線分 BE と線分 CD の交点を F とする。点 A, D, E, F が同一円周上にあり，さらに角のあいだに

$$\angle AEB = 2 \angle ABE = 4 \angle ACD$$

という関係が成り立つとき， $\angle BAC$  の値を求めよ。

- (2) 4 個のさいころを同時に投げるとき，3 の倍数の目のみが出る確率を求めよ。
- (3) 正の実数  $x, y$  に関する次の各命題の真偽を述べよ。また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。
- (a)  $x$  が無理数かつ  $y$  が有理数ならば，その和  $x + y$  は無理数である。
- (b)  $x$  が無理数かつ  $y$  が無理数ならば，その和  $x + y$  は無理数である。

2 次の各問いに答えよ。

- (1)  $a, b, c$  は互いに異なる実数で,  $a > 1, b > 1, c > 1$  とする。次の等式が成り立つとき, 比  $\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c$  を求めよ。

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

- (2) 次の (a), (b), (c) に答えよ。

- (a)  $t = x + \frac{1}{x}$  とおく。このとき,  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  と  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  をそれぞれ  $t$  についての多項式で表せ。

- (b)  $\frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2}$  を  $t$  についての多項式で表せ。

- (c) 4次方程式  $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$  の解を全て求めよ。

3  $r$  を実数とする。  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = ra_{n+1} - 4a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列とする。次の各問いに答えよ。

(1)  $r = 0$  の場合に、以下のそれぞれについて一般項  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。

(i)  $n$  が奇数のとき。

(ii)  $n$  が偶数のとき。

(2)  $r = 5$  の場合に、次の (a), (b) に答えよ。

(a) 数列  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_n = a_{n+1} - 4a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、一般項  $b_n$ ,  $c_n$  を求めよ。

(b) 一般項  $a_n$  を求めよ。

(3)  $r = 4$  の場合に、次の (c), (d) に答えよ。

(c) 数列  $\{d_n\}$  を

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、一般項  $d_n$  を求めよ。

(d) 一般項  $a_n$  を求めよ。

**4** 次の各問いに答えよ。

(1)  $\theta$  を媒介変数として,

$$\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

で表される曲線の  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(2) 2つの曲線  $y = e^{-x} + 1$ ,  $y = 3(e^{-x} - 1)$  の交点の座標を求めよ。ただし,  $e$  は自然対数の底とする。

(3) (2) の2曲線と  $y$  軸で囲まれた図形を  $D$  とする。  $D$  の面積を求めよ。

(4) (3) で与えられた  $D$  を  $x$  軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

**5** 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。

**5—1** 次の各問いに答えよ。

- (1) 座標平面上での原点を中心とする  $150^\circ$  の回転移動を表す行列を  $P$  とする。点  $(x, y)$  が  $P$  の表す移動によって、点  $(2, 4)$  に移ったとする。このとき、点  $(x, y)$  を求めよ。
- (2) (1) で与えられた行列  $P$  を考える。  $P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ。
- (3) 以下の各命題の反例をあげよ。また、反例になっていることを示せ。ただし、 $X, Y$  は2次の正方行列とする。
- (a)  $XY = YX$  が成立する。
- (b)  $XY = O$  ならば、 $X = O$  または  $Y = O$  である。ただし、 $O$  は2次の零行列を表す。
- (c)  $A$  を逆行列  $A^{-1}$  をもつ2次の正方行列とする。このとき、 $AX = Y$  ならば、 $X = YA^{-1}$  である。

**5—2**  $c$  と  $d$  を0ではない実数とする。 $C$  と  $D$  をそれぞれ  $s$  と  $t$  を媒介変数として

$$C: \begin{cases} x = \frac{c}{s^2 + c^2} \\ y = \frac{s}{s^2 + c^2} \end{cases} \quad D: \begin{cases} x = \frac{t}{t^2 + d^2} \\ y = \frac{d}{t^2 + d^2} \end{cases}$$

で与えられる曲線とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1)  $C$  と  $D$  は円から1点を除いた曲線になっている。それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求めよ。
- (2)  $C$  と  $D$  の交点の座標を求めよ。
- (3)  $C$  と  $D$  の交点における  $C$  の接線の方程式を求めよ。

**5—3**

2つの確率変数  $X, Y$  の確率分布を同時に考えた表(同時確率分布表)が以下のように与えられている。ただし、 $X, Y$  は互いに独立であり、 $0 < a < 1, 0 < b < 1$  とする。このとき、次の各問いに答えよ。

$X \backslash Y$	2	4	計
1			$a$
2			
計	$b$		1

- (1) 表を完成させ、完成させた表を解答用紙に書け。
- (2) 確率変数  $W = X - Y$  の平均  $E(W)$  を求めよ。
- (3) 確率変数  $Z = \frac{Y}{X}$  の確率分布表を作成し、 $Z$  の平均  $E(Z)$  を求めよ。
- (4)  $E(Z) = \frac{9}{4}, E(W) = -\frac{3}{2}$  となる場合に、 $Z$  の分散  $V(Z)$  を求めよ。

**5—4**

次の各問いに答えよ。

- (1) 数字1が書かれた玉  $a$  個 ( $a \geq 1$ ) と、数字2が書かれた玉1個がある。これら  $a + 1$  個の玉を母集団として、玉に書かれている数字を変数とする。このとき、この母集団から復元抽出によって大きさ3の無作為標本を抽出し、その玉の数字を取り出した順に  $X_1, X_2, X_3$  とする。標本平均  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  の平均  $E(\bar{X})$  が  $\frac{3}{2}$  であるとき、 $\bar{X}$  の確率分布とその分散  $V(\bar{X})$  を求めよ。ただし、復元抽出とは、母集団の中から標本を抽出するのに、毎回もとに戻してから次のものを1個取り出す抽出法である。
- (2) ある企業の入社試験は採用枠300名のところ500名の応募があった。試験の結果は500点満点の試験に対し、平均点245点、標準偏差50点であった。得点の分布が正規分布であるとみなされるとき、合格最低点はおよそ何点であるか。小数点以下を切り上げて答えよ。ただし、確率変数  $Z$  が標準正規分布に従うとき、 $P(Z > 0.25) = 0.4, P(Z > 0.5) = 0.3, P(Z > 0.54) = 0.2$  とする。