鹿児島大学一般前期

数　　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 学部名と受験番号を，必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の5題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) $0 < a < 1$ とする。次の不等式を解け。

$$\log_a(2x-1)+\log_a(x-1) \leqq 0$$

(2) $(2x-y+z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ。

(3) 三角形の3辺の長さ a, b, c の比が $a:b:c=7:6:5$ であり，面積が $12\sqrt{6}$ のとき，a の値を求めよ。

(4) m と n を正の整数とする。n を m で割ると7余り，$n+13$ は m で割り切れるとき，m の値をすべて求めよ。

2 $0 \leqq x \leqq 1$ とする。このとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^1 |t^2-xt|\,dt$$

と定義する。次の各問いに答えよ。

(1) t の関数 $g(t)=|t^2-xt|$ のグラフの概形をかけ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

3 四角形ABCDに対して次の①と②が成り立つとする。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} \qquad \cdots\cdots②$$

このとき，四角形ABCDは向い合う辺の長さが等しくなる(すなわち平行四辺形になる)ことを示せ。

4 $f(x)$は数直線上の連続関数で，次の条件(i)と(ii)をみたすものとする。

(i) $f(x)$は周期1の周期関数，すなわち，すべてのxで$f(x+1)=f(x)$が成り立つ。

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$

次の各問いに答えよ。

(1) 条件(i)と(ii)をみたす恒等的に0でない連続関数$f(x)$の例を1つ挙げよ。

(2) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$とおくと，$F(x)$も周期1の周期関数であることを示せ。

(3) $n=1,2,3,\cdots$に対して，$\dfrac{d}{dx}F(nx)$をfを用いて表せ。

(4) 数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\int_0^1 xf(nx)\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$を示せ。

5 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

5―1 次の行列 A を考える。

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(1) 2×2 行列 X に対して，$E-X$ が逆行列を持つとき

$$E+X+X^2+\cdots+X^n=(E-X^{n+1})(E-X)^{-1}$$

が成立することを示せ。ただし，E は 2×2 の単位行列である。

(2) A^2 と A^3 を計算せよ。さらに A^{100} と A^{101} を計算せよ。

(3) $E+A+A^2+\cdots+A^{100}$ を計算せよ。

5―2 曲線 C は極方程式 $r=2\cos\theta$ で定義されているとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 曲線 C を直交座標 (x, y) に関する方程式で表し，さらに図示せよ。

(2) 点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き k の直線を考える。この直線が曲線 C と2点で交わるような k の値の範囲を求めよ。

(3) (2)のもとで，2交点の中点の軌跡を求めよ。

5 — 3 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を考える。この試行で，大きいさいころの出た目を X，小さいさいころの出た目を Y とする。$T = 2X - Y$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 確率 $P(T = 6)$，$P(T \geqq 0)$ を求めよ。

(2) 分散 $V(X)$，平均 $E(T)$ を求めよ。

(3) $V(aT) = 25$ となる定数 a の値を求めよ。

5 — 4 次の各問いに答えよ。

(1) 確率変数 X は 0 以上 3 以下の値をとり，その確率密度関数 $f(x)$ は次で与えられているとする。このとき，定数 k，平均 $E(X)$ を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}) \\[2ex] -\dfrac{1}{4}x + k & (1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) Z を標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数とする。また，任意の x $(x \geqq 0)$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x) = P(0 \leqq Z \leqq x)$ とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

(a) 確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ を関数 g で表せ。ただし，a と b は定数で $a < b$ とする。

(b) 母平均 50，母標準偏差 $3\sqrt{10}$ の母集団から大きさ 10 の標本を抽出するとき，標本平均が 41.0 以上 48.5 以下になる確率を関数 g で表せ。

(c) $0 < p < 1$ とし，l_p は $g(l_p) = \dfrac{p}{2}$ をみたすものとする。母分散 25 の母集団から大きさ 20 の標本を抽出したところ，標本平均が 45 であった。母平均 m に対する信頼度 $100p$ % の信頼区間の区間幅を l_p を用いて表せ。