鳥取大学

数学

問題

2017年度入試

【学部】　地域学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　医（医）学部は 1 ～ 4，工・医（生命科学・保健）学部は 1，2 (1) (2)，3，5，農・地域学部は 1，2 (1) (2)，6，7 を解答すること．

1 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．$a_1=1$ とし，自然数 n に対して a_n が定まったとき，曲線 $C_n\colon y=\dfrac{1}{a_n}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通り，点 P_n における曲線 C_n の接線に垂直な直線を l_n とし，C_n と l_n の共有点のうち，P_n と異なる点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) C_n と l_n で囲まれた部分の面積を A_n とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$ を求めよ．

2 xy 平面において，$kx^2+ky^2+x-y-4k+1=0$ で表される円 C があるとき，以下の問いに答えよ．ただし，k は正の実数とする．

(1) k の値によらず円 C が通る定点 A，B を求めよ．

(2) 円 C の中心 D と点 E(1, 5) を結ぶ線分 DE の長さが最小となるときの k の値と，そのときの円 C の半径 r を求めよ．

(3) k を (2) で求めた値とする．円 C 上の点 Q と点 E(1, 5) を結ぶ線分 QE の中点を P とする．点 Q が円 C 上を動くとき，$\triangle$ABP の面積の最大値を求めよ．

3 xy 平面上の曲線 C が

$$|y-3x-2x^2|=-(x-1)(2x-1)$$

で定められているとき，この曲線 C によって囲まれる図形の面積 S を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C 上の点の x 座標がとり得る値の範囲を求めよ．

(2) 面積 S を求めよ．

4 $\triangle$ABC において，点 B から直線 AC に下ろした垂線を BQ，点 C から直線 AB に下ろした垂線を CP とし，直線 BQ と直線 CP の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に直交することを示せ．

(3) 直線 AH と直線 BC の交点を R とする．$a=|\vec{a}|$，$b=|\vec{b}|$，$x=\cos\angle\mathrm{A}$ とおくとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を a，b，x を用いて表せ．

(4) $\mathrm{AB}\fallingdotseq\mathrm{AC}$ を満たす $\triangle$ABC において，辺 AB および辺 AC の長さをそれぞれ a，b で一定に保ちながら $\angle\mathrm{A}$ の大きさを $0<\angle\mathrm{A}<\pi$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ の最大値を求めよ．また，そのとき $\triangle$ABC はどのような三角形か．

5 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ．

(2) $t>0$ に対して，x 軸上に点 $\mathrm{H}(t,\ 0)$ をとり，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線と x 軸との交点を Q とする．このとき，三角形 PQH の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $t>0$ のとき，(2) で求めた面積 $S(t)$ の最大値を求めよ．

6 三角形 ABC の重心を G とする．三角形 ABC の各頂点 A，B，C と点 G を結ぶ直線が辺 BC，CA，AB と交わる点を，それぞれ D，E，F とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 EFG の面積を S とするとき，三角形 BCG と三角形 AFE の面積をそれぞれ S を用いて表せ．

(2) 三角形 ABC の面積は，四角形 AFGE の何倍になるかを求めよ．

7 平面上の点 O を中心とする半径 2 の円周上に 3 点 A，B，C があり，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たす．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(3) 線分 AB と線分 OC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(4) 四角形 OBCA の面積を求めよ．