

高知大学

平成 31 年度 入学試験問題(前期日程)

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間 120分

理工学部：数学物理学科(数学受験)・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子 問題……

1

 ～

4

 ページ…… 1～2
解答用紙…… 4枚
下書用紙…… 1枚

配 点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の0.75倍とする。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

1 c を実数とする。 x, y の多項式 $x^2 + y^2 - 5 - c(xy - 2)$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) $x^2 + y^2 - 5 - c(xy - 2) = 0$ がどのような実数 c に対しても成り立つような実数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) $c = 2$ のとき、 $x^2 + y^2 - 5 - c(xy - 2)$ を x, y の 1 次式の積として表せ。
- (3) $c = 0$ のとき、 $x^2 + y^2 - 5 - c(xy - 2)$ は x, y の 1 次式の積として表されないことを示せ。すなわち、 x, y の多項式として $x^2 + y^2 - 5 = (px + qy + r)(sx + ty + u)$ をみたす実数 p, q, r, s, t, u は存在しないことを示せ。
- (4) $x^2 + y^2 - 5 - c(xy - 2)$ が x, y の 1 次式の積として表されるような c の値をすべて求めよ。

2 a, b を $a > b > 0$ をみたす実数とする。 xy 平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の焦点を F, F' とし、楕円上の点 $A(0, b)$ をとる。さらに O を原点とし、 $\theta = \angle FAO$ ($0 \leq \theta < \pi$) とする。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) $\cos \theta$ を a, b を用いて表せ。
- (2) 3 点 A, F, F' を通る円 C の中心を O' とするとき、扇形 $O'AF$ (中心角 $\angle AO'F$ が π 未満のほう) の面積 S を a と θ を用いて表せ。
- (3) 円 $x^2 + y^2 = b^2$ の面積とこの楕円の面積の比は $b : a$ であることを定積分を用いて示せ。
- (4) (3) の面積比が $1 : 2$ のとき、(2) の面積 S を a の式で表せ。

3

実数 x に対して、 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $f(x) = f(1-x)$ をみたす実数 x を求めよ。

(2) すべての実数 x に対して、 $f(x) + f(1-x)$ の値を求めよ。

(3) $\sum_{n=1}^{2018} f\left(\frac{n}{2019}\right) = \frac{2^{\frac{1}{2019}}}{2^{\frac{1}{2019}} + \sqrt{2}} + \frac{2^{\frac{2}{2019}}}{2^{\frac{2}{2019}} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{2018}{2019}}}{2^{\frac{2018}{2019}} + \sqrt{2}}$ の値を求めよ。

(4) $\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x) dx$ の値を求めよ。

4

次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $x > 1$ をみたす実数 x に対して、 $x - \log x \geq 1$ であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して、 $2(\sqrt{n} - 1) \geq \log n$ であることを示せ。

(3) 2 以上の整数 n に対して、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{n}$$

であることを示せ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \right) - \log n \right)$ を求めよ。