

高知大学

平成 30 年度 入学試験問題(前期日程)

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間 120分

理工学部：数学物理学科(数学受験)・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子 問題…… 1 ~ 4 ページ…… 1 ~ 2
解答用紙…… 4 枚
下書用紙…… 1 枚

配 点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の 0.75 倍とする。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

1 $f(x) = x^2 + x + 105$ とおく。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 52, a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) x が 7 で割ると 3 余るような整数のとき、 $f(x)$ を 7 で割った余りは 5 であることを示せ。
- (2) $n > 4$ のとき、 a_n は 7 の倍数であることを示せ。
- (3) $n > 4$ のとき、 a_n を 5 で割ったときの余りを求めよ。
- (4) $n > 4$ のとき、 a_{n+1} と a_n の最大公約数は 21 に等しいことを示せ。

2 複素数 z に対して、 \bar{z} で z に共役な複素数、 $|z|$ で z の絶対値、 $\arg z$ で z の偏角を表す。また、 i を虚数単位とする。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) $z^2 + \bar{z}^2 = 0$ をみたす複素数 z の集合は複素数平面上でどのような図形を描くかを図示せよ。
- (2) $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \alpha^2$ をみたす複素数 α をすべて求めよ。
- (3) $(-1 - \sqrt{3}i)z^2 + (-1 + \sqrt{3}i)\bar{z}^2 = 0$ をみたす複素数 z の集合は複素数平面上でどのような図形を描くかを図示せよ。
- (4) $(-1 - \sqrt{3}i)z^2 + (-1 + \sqrt{3}i)\bar{z}^2 = 0$, $|z| = 1$, $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ を同時にみたす複素数 z をすべて求めよ。

3 $f(x)$ を $f(x) = f(-x)$ かつ $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ をみたす多項式とする。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = -f'(-x)$ をみたすことを導関数と微分係数の定義にしたがって示せ。
- (2) $f(x)$ は x^2 で割り切れることを示せ。
- (3) $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - 1$ となるような a の値を二つ求めよ。
- (4) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx$ をみたす6次の多項式 $f(x)$ をすべて求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) 定積分

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

を求めよ。

- (2) 正の整数 n に対して、 $S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k$ とおく。このとき、任意の実数 x に対して、

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| \leq x^{2(n+1)}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (2)の $S_n(x)$ に対して、

$$\left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x) dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq 3^{-n}$$

を示せ。

- (4) (1),(3)の結果を用いて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

を求めよ。