高知大学

平成29年度　入学試験問題（前期日程）

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

試験時間　120分

理工学部：数学物理学科・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子　　　**問題…… $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$**　　　**ページ…… 1～2**

解答用紙…… 4枚

下書用紙…… 1枚

配　　点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の0.75倍とする。

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

$\boxed{1}$ 曲線 $C: x^2+3y^2=4$ と，その上の点P(1, 1)を考える。実数 m に対して，Pを通る傾き m の直線を l_m とし，l_m と C との交点で，Pと異なるものを $Q_m(a_m, b_m)$ とおく。ただし，l_m が C と接する場合には，$Q_m = P$ と決めることにする。このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) 曲線 C のPにおける接線の方程式を求めよ。

(2) Q_m の座標 (a_m, b_m) を m を用いて表せ。

(3) m が有理数のとき，a_m，b_m はともに有理数であることを示せ。

(4) a_m，b_m がともに有理数のとき，m は有理数であることを示せ。

$\boxed{2}$ 一般項が $a_n=\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の第 n 項 a_n の値を越えない最大の整数を $[a_n]$ と表す。また，$\langle a_n\rangle = a_n - [a_n]$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) $[a_1]$，$[a_2]$，および $[a_3]$ のそれぞれの値を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ を満たすすべての整数 n に対して，$[a_n]=2^n+1$ であることを示せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\langle a_n\rangle$ を求めよ。

(4) $\langle a_n\rangle \leqq \dfrac{1}{8}$ を満たす4以上の整数 n をすべて求めよ。

3 nは正の整数とする。1からnまでの異なるn個の整数の順列を考える。以下そのような順列に対して，直前の数よりも小さい数が並ぶ回数を「下降回数」と呼ぶ。例えば，$n=4$のとき，1432では4の次に3，3の次に2が並んでいるので下降回数は2である。同様にして1234，1324，4321の下降回数はそれぞれ0，1，3である。下降回数が1である順列の総数をa_n，下降回数が2である順列の総数をb_nとおく。このとき，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) a_4を求めよ。

(2) $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k-1)$であることを示せ。

(3) a_nを求めよ。

(4) $n\geqq 2$のとき，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k\,a_{n-k}-\sum_{m=1}^{n-1}(m-1)({}_n\mathrm{C}_m-1)$であることを示せ。

4 すべての実数xに対して$f(x)=|\sin(\pi x)|$で定義される関数$f(x)$について，次の問いに答えよ。

(100点)

(1) $y=f(x)$のグラフをかけ。

(2) 定積分$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx$を求めよ。

(3) 自然数nに対し，$I_n=\displaystyle\int_0^n e^{-x}f(x)\,dx$とおく。このとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$を求めよ。