高知大学

平成 26 年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間　120 分

理学部(理学科・応用理学科)
医学部(医学科)

問題冊子　　問題……$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　ページ……1～2

解答用紙……4 枚

下書用紙……1 枚

配　　点……表示のとおり。

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 $f(x)=x(x-1)(x+1)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ が極大，極小になるときの x と，その極大値，極小値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) x が $|x-1|<\dfrac{1}{2}$ をみたすとき，点 $(x,\ f(x))$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 3 の円の内部に含まれることを示せ。

(4) 1 以下の正の数 r に対して，x が $|x-1|<r$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ f(x))$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 $10r$ の円の内部に含まれることを示せ。

(100 点)

2 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_n^2-b_n \geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ となる数列とし，3 次関数

$$y=x^3+3a_nx^2+3b_nx+1$$

のグラフの接線の傾きが 0 となる接点の x 座標のうち小さくない方を c_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $a_n=n$，$b_n=n^2$ で与えられる数列のとき，$\{c_n\}$ を求めよ。

(2) $\{b_n\}$ を初項も公差も 0 である等差数列とする。このとき，$c_n=b_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ となるための条件を求めよ。

(3) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ公比が r，r^2 の等比数列とする。このとき，$\{c_n\}$ が等比数列になるための条件を求めよ。

(4) $\{a_n\}$ が初項 100，公差 -3 の等差数列で，$\{b_n\}$ は初項 396，公差 -12 の等差数列のとき，$\{c_n\}$ を求めよ。

(100 点)

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)x & (-1 \leqq x \leqq 0\ のとき) \\ -\dfrac{1}{2}x(x-1) & (0 < x \leqq 1\ のとき)\end{cases}$$

とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3) $y=f'(x)$ のグラフを $-1<x<1$ の範囲でかき，$f'(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうかを理由をつけて述べよ。

(4) $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

(100 点)

4 k は 1 以上の整数であるとする。連続した整数が書かれた 2^k-1 枚のカードが一組あり，その中に無作為に選ばれた当たりが一枚だけ含まれているとする。

次のようなルールで当たりのカードにたどりつくことを考える。

(i) カードのうち，ちょうど真ん中の整数の書かれたカードをひく。それが当たりなら終了する。

(ii) ハズレならば，真ん中の整数より大きいカードの組と小さいカードの組に分ける。

(iii) 当たりのカードの含まれた組を教えてもらい，その組に対して，(i)に戻って繰り返す。

このルールのもとで，ひいたカードの枚数の期待値を E_k とおく。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) E_1, E_2, E_3, E_4 を求めよ。

(2) E_{k+1} を E_k を用いて表せ。

(3) $d_k=E_k-\dfrac{1}{2^k}(E_k+1)$ とおくとき，d_k のみたす漸化式を求めよ。

(4) E_k を求めよ。

(5) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}(E_k-k)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2^k}=0$ であることを用いてもよい。

(100 点)