高知大学

平成24年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間　120分

理学部(理学科・応用理学科)
医学部(医学科)

問題冊子　　**問題……** $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　**ページ……1～2**

解答用紙……4枚

下書用紙……1枚

配　　点……表示のとおり。

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $x^2 + y^2 < 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) 不等式 $|x| + |y| < 2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(3) 実数 x，y が $x^2 + y^2 < 5$ をみたすとき，$|x| < 3$ かつ $|y| < 3$ が成り立つことを示せ。

(4) 任意の実数 x，y に対して，$|x| + |y| \leqq 2\sqrt{x^2 + y^2}$ が成り立つことを示せ。

(100 点)

2 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ に対し，第 1 項から第 n 項までの和を S_n とおく。a_n と S_n の間に次の関係が成り立っているとする。

$$S_n = \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(100 点)

3 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を負でない実数を成分とする行列とし，C を原点を中心とする半径5の円とする。円 C 上の任意の点 $(x,\ y)$ に対して $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる $X,\ Y$ は常に $9X^2-16Y^2=0$ をみたしているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて表せ。

(2) $c=0$ のとき，b を d で表せ。

(3) $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ となる A を1つ求めよ。

(100点)

4 次の問いに答えよ。

(1) 次の不定積分を求めよ。

$$\int \log(1+x)\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ が区間 $[0,\ 1]$ で連続な増加関数であって，常に $f(x) \geqq 0$ であるものとする。また，n を自然数とする。このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}\{f(1)-f(0)\}$$

(3) $f(x)=\log(1+x)$ に対して(2)の結果を用いて，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}\right]$$

(100点)