香川大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】　教育学部、法学部、医学部、農学部、創造工学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　創造工（A タイプ）学部は 1 ～ 4，医（医）学部は 4，5，8，9，教育・医（臨床心理）・農学部は 1，5，6 必須，4，7 のどちらかを選択，創造工（B タイプ）・法学部は 1，5 ～ 7．

1 連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x+1| \\ 2x-3y+9 \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とするとき，次の問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2-4x+y^2 の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，M，m を与える D 内の点の座標を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，次の問に答えよ．

(1) a_5，a_6 を求めよ．

(2) 自然数 n に対して $S_{4n}=\sum_{k=1}^{4n} a_k$ とおくとき，S_{4n} を n を用いて表せ．

(3) $0.1999 < S_{4n}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

3 四面体 OABC において，辺 OA を 4 : 1 に内分する点を D，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を E，線分 DE を 3 : 2 に内分する点を F とし，直線 OF が平面 ABC と交わる点を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) OF : FG を求めよ．

4 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 2 \\ y \geqq x^2 \end{cases}$ の表す領域を D とするとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $x^2+y^2=2$ と曲線 $y=x^2$ の交点をすべて求めよ．

(2) この 2 曲線の概形をかき，D を図示せよ．

(3) D の面積を求めよ．

(4) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

5 さいころを使って，点数 x_i を次のように順番に決めていくゲームを考える．

1 回目にさいころを投げて，出た目を 1 回目の点数 x_1 とする．$x_1=1$ ならばそこでゲームを終了する．$x_1 \geqq 2$ ならばゲームを続行し，さらにさいころを投げて 2 回目の点数 x_2 を下記の規則 a)，b) にしたがって決める．$x_2=1$ ならばそこでゲームを終了する．

一般に，$x_i \geqq 2$ ならばゲームを続行し，さらにさいころを投げて $(i+1)$ 回目の点数 x_{i+1} を下記の規則 a)，b) にしたがって決める．$x_{i+1}=1$ ならばそこでゲームを終了する．

a)　x_i が奇数のとき，

$(i+1)$ 回目に投げたさいころの目が $\begin{cases} \text{奇数ならば } x_{i+1}=3x_i+1 \\ \text{偶数ならば } x_{i+1}=x_i \end{cases}$

b)　x_i が偶数のとき，

$(i+1)$ 回目に投げたさいころの目が $\begin{cases} \text{奇数ならば } x_{i+1}=x_i \\ \text{偶数ならば } x_{i+1}=\dfrac{x_i}{2} \end{cases}$

このとき，次の問に答えよ．

(1)（大学の都合により省略.）

(2) さいころを投げた回数が 2 回以下でゲームが終了する確率を求めよ．

(3) さいころを投げた回数が 3 回以下でゲームが終了する確率を求めよ．

(4) さいころを投げた回数が 6 回以下でゲームが終了する確率を求めよ．

6 数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1=2, \quad (n+1)a_{n+1}-3(n+2)a_n = 2n^2+6n+4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(2) b_n を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

7 座標平面上の曲線 C: $y=x^2$ と C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ について，次の問に答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) 点 P における C の接線 l の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた直線 l が曲線 C': $y=(x+b)^2-b^2$ に接しているとする．その接点を Q としたとき，b および点 Q の座標を a を用いて表せ．ただし，$b \neq 0$ とする．

(3) (2) のとき，曲線 C，C' および直線 l で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

8 $r>3$ とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $\mathrm{PO}:\mathrm{PA}=3:1$ である点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(2) $\mathrm{PO}:\mathrm{PB}=3:r$ である点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(3) $\mathrm{PO}:\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=3:1:r$ となる点 P が存在するような r の範囲を求めよ．

9 2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数になることを示せ．

(3) $\alpha>\beta$ とする．このとき，すべての自然数 n に対して，$[\alpha^n]$ は奇数になることを示せ．ただし，$[\alpha^n]$ は α^n 以下の最大の整数を表す．