香川大学

数学

問題

2017年度入試

【学部】 教育学部、法学部、医学部、工学部、農学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　工学部は1～4，医学部は4，7，9，10，教育・農学部は1，5，6必須，7，8のどちらかを選択．法学部は1，5～7．

1 三角形ABCにおいて，辺ABを$m:n$に内分する点をP，辺ACを$n:m$に内分する点をQ，辺BCの中点をMとする．ただし，$m>0$，$n>0$とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) 線分AMとPQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$m$，$n$を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}$を$m$，$n$を用いて表し，線分PQが三角形ABCの重心を通らないことを示せ．

2 自然数の列を次のように群に分け，第n群には連続するn個の自然数が入るようにする．

$$\underset{\text{第1群}}{1}\ \big|\ \underset{\text{第2群}}{2,\ 3}\ \big|\ \underset{\text{第3群}}{4,\ 5,\ 6}\ \big|\ \underset{\text{第4群}}{7,\ 8,\ 9,\ 10}\ \big|\ 11,\ \cdots$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) 自然数29は第何群に入るか．

(2) 第n群に入る最小の自然数と最大の自然数をnを用いて表せ．

(3) 自然数2017は第何群に入るか．

3 次の等式a)，b)，c)がそれぞれ成立している．a)，b)，c)それぞれについてyをxを用いて表し，xがすべての実数値をとるときにyのとりうる値の範囲を求めよ．

a)　$\log_2 y-2x+3=0$

b)　$\log_2 y+\log_2(x^2+1)-3=0$

c)　$\log_2 y-\log_4(x^2+1)-1=0$

4 曲線C_1: $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$，曲線$C_2$: $y=\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$について，次の問に答えよ．

(1) 2曲線C_1とC_2，およびy軸で囲まれた図形Dの面積を求めよ．

(2) 不定積分$\displaystyle\int x\sin x\,dx$と$\displaystyle\int x\cos x\,dx$を求めよ．

(3) 不定積分$\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$と$\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$を(2)を用いて求めよ．

(4) 図形Dをy軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

5 座標平面上の点$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin 2\theta)$について，次の問に答えよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$とする．

(1) 点Pが原点Oに一致するようなθの値をすべて求めよ．

(2) 点Pが単位円周上にあるようなθの値をすべて求めよ．

(3) $t=\sin^2\theta$とおくとき，OP^2をtを用いて表せ．

(4) OPの最大値を求めよ．

6 座標平面上に2点$\mathrm{A}(0,\ -t^2)$，$\mathrm{M}(t,\ 0)$をとる．ただし，$t>0$とする．
y軸上に，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BM}$となるような点Bをとり，直線AM上に，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$となるような，点Aと異なる点Cをとる．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点Cの座標を求めよ．

(2) 点Cを中心とし，点Bを通る円の方程式を求めよ．

(3) (2)で求めた円上の点で，y座標が最小となるような点の座標を求めよ．

7 実数a，bが$0<a<b$，$a<b^3$を満たすとき，曲線C_1: $y=ax^2\ (x\geqq 0)$，曲線C_2: $y=bx^2\ (x\geqq 0)$について，次の問に答えよ．

(1) 曲線C_1と直線$x=b$，およびx軸で囲まれた部分の面積をS_1，曲線C_2と直線$y=a$，およびy軸で囲まれた部分の面積をS_2とするとき，S_1，S_2をそれぞれa，bを用いて表せ．

(2) $S_1=S_2$となるとき，aをbを用いて表せ．

(3) x座標がbである曲線C_1上の点を$\mathrm{P_1}$，y座標がaである曲線C_2上の点を$\mathrm{P_2}$とする．曲線C_1とC_2，および直線$\mathrm{P_1P_2}$で囲まれた部分の面積をS_3とする．$S_1=S_2$となるとき，S_3をbを用いて表せ．

(4) $S_1=S_2=S_3$となるとき，a，bの値を求めよ．

8 曲線C: $y=e^{-ax}$について，次の問に答えよ．ただし，$a>0$とする．

(1) 曲線Cとy軸の交点PにおけるCの接線lの方程式を求めよ．

(2) 直線lとx軸の交点Qの座標を求めよ．

(3) Oを原点とし，Rを，Qとx座標が等しいC上の点とする．三角形OPQの面積をS_1，台形OPRQの面積をS_2とするとき，

$$S_1<\frac{1}{a}(1-e^{-1})<S_2$$

が成り立つことを示せ．

9 座標平面上の点 $(x,\ y)$ は，x，y がともに整数のとき，格子点という．関数

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^3+3x^2-x-2)$$

について，次の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフ上には格子点が存在しないことを示せ．

(2) n が整数のとき，点 $(n,\ f(n))$ における $y=f(x)$ の接線を l とする．直線 l 上には無限に多くの格子点が存在することを示せ．

10 三角形 ABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 AC を 5 : 3 に内分する点を E とする．また，線分 BE と CD の交点を F とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) CF : FD を求めよ．

(2) 4 点 D，B，C，E が同一円周上にあるとする．このとき，AB : AC を求めよ．さらに，この円の中心が辺 BC 上にあるとき，AB : AC : BC を求めよ．