

平成 24 年 度

(医 学 部)

問題冊子

教 科	科 目	ページ数
数 学	数学Ⅰ・数学A 数学Ⅱ・数学B 数学Ⅲ・数学C	2

試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。

解答の書き方

1. 解答は、すべて別紙解答用紙の所定欄に、はっきりと記入すること。
2. 答案には、解答の過程を書き、結論を明示すること。
3. 解答を訂正する場合には、きれいに消してから記入すること。
4. 解答用紙には、解答と志望学部及び受験番号のほかは、いっさい記入しないこと。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図の後、解答用紙に志望学部及び受験番号を必ず書くこと。
2. 下書き用紙は、片面だけ使用すること。
3. 用事があるときは、だまって手をあげて、監督者の指示を受けること。
4. 試験終了時には、解答用紙を必ずページ順に重ね、机上の右側に置くこと。
5. 試験終了後、問題冊子及び下書き用紙は持ち帰ること。

[1] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする。このとき、次の間に答えよ。

1. $A^2 - 6A + 9E = O$ を示せ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

2. 数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

で定めるとき、 x_n 、 y_n をそれぞれ n を用いて表せ。

3. 自然数 n に対して、 $A^n = a_n A + b_n E$ となる a_n 、 b_n をそれぞれ n を用いて表せ。

[2] 楕円 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ および双曲線 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、次の間に答えよ。ただし、 $a > 0$ 、 $b > 0$ とする。

1. 楕円 C_1 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

であることを示せ。

2. 楕円 C_1 の外部の点 (p, q) を通る C_1 の 2 本の接線の接点をそれぞれ A_1 、 A_2 とする。直線 $A_1 A_2$ の方程式は

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$$

であることを示せ。

3. (p, q) が双曲線 C_2 上の点であるとき、直線 $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$ は C_2 に接することを示せ。

〔3〕 曲線 $C: y = x \sin x$ について、次の間に答えよ。

1. C の接線のうち、原点を通る接線の方程式をすべて求めよ。
2. 直線 $y = \frac{1}{2}x$ と C との交点のうち、第1象限にあるものを x 座標の小さい方から順に P_1, P_2, P_3, \dots とする。線分 $P_{2n-1}P_{2n}$ と C で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。
3. 点 $Q_n\left(\frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi\right)$ に対して、 $\triangle P_{2n-1}P_{2n}Q_n$ の面積を T_n とする。このとき、 n によらずに $\frac{S_n}{T_n}$ が一定であることを示せ。

〔4〕 n を2以上の整数とする。集合 $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ を2つの空集合ではない部分集合 A_n, B_n に分ける。すなわち、 $A_n \cup B_n = X_n$, $A_n \cap B_n = \phi$, $A_n \neq \phi$, $B_n \neq \phi$ である。 A_n に属する自然数の和を a_n , B_n に属する自然数の和を b_n とおく。例えば、 $n = 5$ のとき、 X_5 を $A_5 = \{1, 2, 5\}$, $B_5 = \{3, 4\}$ と分ければ、 $a_5 = 8$, $b_5 = 7$ となる。このとき、次の間に答えよ。

1. n が4の倍数のとき、 $a_n = b_n$ となるように X_n を分けられることを示せ。
2. $n + 1$ が4の倍数のときも、 $a_n = b_n$ となるように X_n を分けられることを示せ。
3. n も $n + 1$ も4の倍数ではないとき、 $a_n = b_n$ となるようには X_n を分けられないことを示せ。