長崎大学

平成30年度 入学試験問題

数学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び解答用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後は，すべての解答用紙に受験番号・氏名を記入すること。
3. 各志願者は，下の表 (1) に指示した問題を解答すること。ただし，教育学部については志望するコース（専攻）により，下の表 (2) のように分類する。
4. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
5. 解答は明瞭に書くこと。
6. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1)

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

表 (2)

分類	志望するコース（専攻）
教育学部A	小学校教育コース 幼稚園教育コース（こども保育専攻） 特別支援教育コース 中学校教育コース（社会専攻，技術専攻）
教育学部B	中学校教育コース（数学専攻）

平成 30 年度入学試験問題

問題補足（数学）

1　受験者に対して，「解答はじめ」の指示の直前に問題の補足があることを以下のとおり口頭で伝えてください。

【この時間には，問題の補足があります。補足の内容は試験開始直後に板書します。】

2　試験開始直後に下枠の内容を黒板に一字一句正しく書いてください。

数学（ $\boxed{8}$ ）

＜問題補足＞

数学　１５ページ　問題 $\boxed{8}$ の３行目

「・・・。ただし，$0! = 1$と定める。」

の続きに

「また，関数 $y = t^0$ は，関数 $y = 1$ を意味する。」

を追加する。

3 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，初項 a_1 および一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = A$ とするとき，

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

の値を A を用いて表せ。

(3) 方程式

$$\log_2 x^2 = 2 + \log_2|x-2|$$

を解け。

(4) 関数 $f(x)$ を

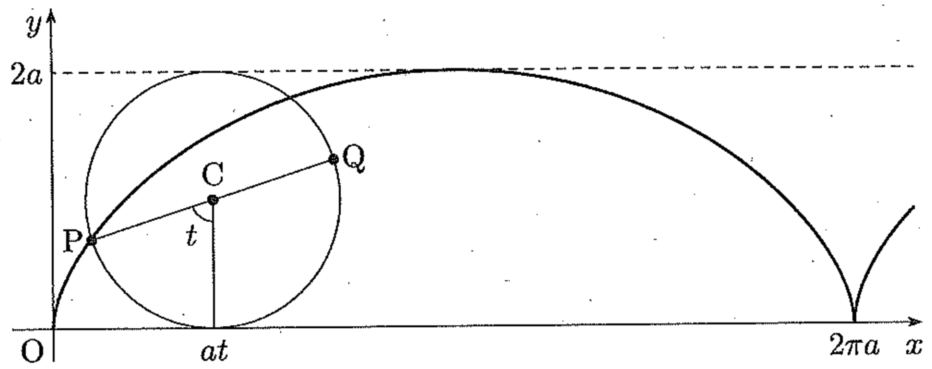
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$$

と定義する。「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ。

4 半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える。時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,2a)$ にある。円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する。このとき，点 P の時刻 t における座標 (x,y) は

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1) 時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ。

(2) 時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最大値と最小値，およびその時の P の座標を求めよ。

(3) 時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。

(4) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$ がある。曲線 $C\colon y=f(x)$ の変曲点をPとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減および凹凸を調べ，極値およびPの座標を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点Pにおける接線を ℓ とする。また，Pを通り ℓ に垂直な直線を m とする。ℓ，m の方程式を求めよ。

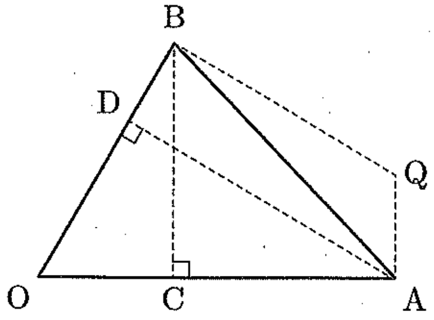
(3) 直線 m と曲線 C との交点で，Pと異なる点をQ，Rとする。ただし，Qの x 座標はRの x 座標より小さいものとする。このとき，C と線分PRとで囲まれる図形 F の面積 S を求めよ。

(4) Pを通り，図形 F の面積を2等分する直線の方程式を求めよ。

6 三角形 OAB において，

$$\mathrm{OA} = a,\quad \mathrm{OB} = b,\quad \angle \mathrm{O} = \theta$$

とおく。ただし，$0 < b \leqq a$，$0 < \theta < \pi$ である。また，点 C と D は，それぞれ，直線 OA と OB 上にあり，$\mathrm{CB} \perp \mathrm{OA}$，$\mathrm{DA} \perp \mathrm{OB}$ を満たす。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，この三角形の外心 P について調べる。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a，b，θ，$\vec{a}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を a，b，θ，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) OA の A を通る垂線と，OB の B を通る垂線との交点を Q とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \ell\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = m\,\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ となる実数 ℓ，m がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ であることに注意して，ℓ と m の値を a，b，θ を用いて表せ。

(3) Q が (2) の点であるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = p\,\vec{a} + q\,\vec{b}$$

となる実数 p，q がある。p と q の値を a，b，θ を用いて表せ。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\,\vec{a} + s\,\vec{b}$$

を満たす r と s の値を a，b，θ を用いて表せ。

7 t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 A(t)，B$\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある。等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}\,|z-t| \qquad \text{(a)}$$

を満たす点 P(z) の全体が表す図形を F とする。下の小問 (1) から (4) を通して F がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

(1) A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ。

(2) $t=1$ ならば，F はどのような図形を表すか。

(3) $t \fallingdotseq 1$ とする。図形 F の点 P(z) が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある。その値 z_1 と z_2 を求めよ。ただし，$|z_1|<|z_2|$ とする。

(4) $t \fallingdotseq 1$ とする。2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を M(m) として，m の値を求めよ。また，P(z) が図形 F の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ。さらに，F はどのような図形を表すか。

$\boxed{8}$ 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!}\, e^{-t}\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0! = 1$ と定める。

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4) $p(x) = x^n$ とおくとき，k 次導関数

$$p^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\, dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x) = p(x)$ と定める。