長崎大学

平成29年度 入学試験問題

数学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び解答用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表 (1) に指示した問題を解答すること。ただし，教育学部については志望するコース（専攻）により，下の表 (2) のように分類する。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1)

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

表 (2)

分類	志望するコース（専攻）
教育学部A	小学校教育コース 幼稚園教育コース（こども保育専攻） 特別支援教育コース 中学校教育コース（社会専攻，技術専攻）
教育学部B	中学校教育コース（数学専攻）

3 以下の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

(2) e を自然対数の底とする。$x > e$ の範囲において，関数

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

を考える。この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ。また，$e < a < b$ のとき，$a^b > b^a$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)$$

であるとき，$a_{n+1} - a_n$ を n の式で表し，a_n が最大となる正の整数 n をすべて求めよ。

(4) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ が，原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くとき，

$$w = \frac{z + 3i}{z}$$

で表される点 $\mathrm{Q}(w)$ はどのような図形を描くか。

4 空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ を考える。2 辺 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AG}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) 2 点 P, Q が $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PQ}$ を満たすとき，3 点 P, Q, G は同一直線上にあることを示せ。

(3) $\triangle ABC$ の頂点の座標が $A(0,0,1)$, $B(7,0,6)$, $C(2,12,5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 $P(x,y,0)$ を考える。このとき，$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4) (3) において，特に点 $P(x,y,0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする。$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。

$\boxed{7}$ 放物線 $C\colon y=x^2$ と定点 $\mathrm{A}(0,1)$，$\mathrm{B}(0,2)$ および C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_1(2,4)$ が与えられている。自然数 $n=1,2,3,\cdots$ について，以下の操作をくり返す。

> C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_n(p_n, {p_n}^2)$ に対し，
>
> 手順 1　直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ と C との交点のうち，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}_n(q_n, {q_n}^2)$ とし，
>
> 手順 2　直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1}, {p_{n+1}}^2)$ とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を定数とする。直線 $y=ax+1$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}(p, p^2)$，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}(q, q^2)$ とする。このとき，$pq=-1$ が成り立つことを示せ。また，点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 点 P_2，Q_2 および P_3 の座標を求めよ。

(3) 数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(4) $x \geqq 0$ の範囲において，C と 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ。

$\boxed{8}$ xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある。この円の周上に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ と $\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$ をとる。ただし，$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。さらに，2 点 A，B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C，D とする。

扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD，DC，CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) S_1 を α と β で表せ。

(2) S_2 を α と β で表せ。

(3) $S_1 = S_2$ のとき，β を α の式で表せ。また，このとき $t = \cos\alpha - \cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) (3) のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする。さらに，$V = V_1 - V_2$ とする。V を t の式で表せ。

(5) (4) において，V の最大値，およびそのときの A，B の座標を求めよ。