長崎大学 一般 前期

平成23年度 入学試験問題

数　　学

注 意 事 項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	1	2	4	6
経済学部	1	2		
医学部	2	4	7	8
歯学部	1	3	5	6
薬学部	1	2	4	6
工学部	1	3	5	6
環境科学部	1	2		
水産学部	1	2		

$\boxed{1}$ $f(x)=1-x^2$ とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ は $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲で動くものとする。原点と点 P の 2 点を通る直線を l，点 P における $y=f(x)$ の接線を m とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 2 直線 l と m の方程式を求めよ。

(2) $x \geqq 0$ において，y 軸と曲線 $y=f(x)$ および直線 l で囲まれた図形の面積を $S_1(a)$ とし，y 軸と曲線 $y=f(x)$ および直線 m で囲まれた図形の面積を $S_2(a)$ とする。$S_1(a)$ と $S_2(a)$ を a を用いて表せ。

(3) $S_1(a)=2S_2(a)$ を満たす a の値を求めよ。

(4) $S_1(a)-S_2(a)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

1 （下書き用紙）

2 3辺の長さが AB $=4$，BC $=3$，CA $=5$ である直角三角形 ABC と，その内側にあって2辺 AB および AC に接する円 O を考える。この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$, $\vec{v}$ とし， $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{u}$ ($t>0$) とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AO と辺 BC の交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ。

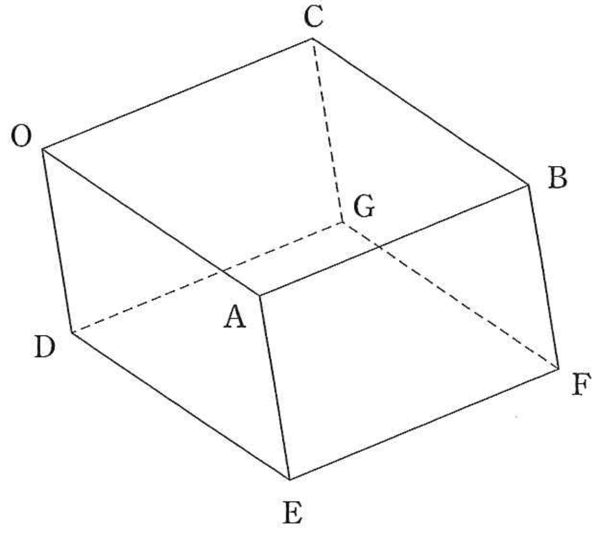
(2) ベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$, $\vec{v}$ および t を用いて表せ。また，円 O の半径 r を t で表せ。

(3) 円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする。すなわち，I は三角形 ABC の内心である。そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ。

(4) 円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ。

2 （下書き用紙）

3 下図の平行六面体 OABC − DEFG を考える。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とおき，次の問いに答えよ。



(1) 三角形 ACD と線分 OF との交点を H とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = r\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

をみたす実数 r，s，t を求めよ。また，H が三角形 ACD の重心であることを示せ。

(2) H は三角形 ODB の重心でもあることを示せ。

(3) さらに OA = OC，∠AOD = ∠COD ならば，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であることを示せ。

3 （下書き用紙）

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関係式

$$a_1 = 1, \qquad na_{n+1} - (n+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい。$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ。

(2) $x \neq 1$ のとき，等比数列の和の公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

の両辺を x で微分せよ。その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k$ を求めよ。

(3) $p \neq 1$ のとき，関係式

$$c_1 = 0, \qquad \frac{pc_{n+1}}{n} - \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

4 （下書き用紙）

5 次の問いに答えよ。

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) θ が $\tan\theta=\dfrac{1}{5}$ および $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすとき，$\tan 2\theta$ と $\tan 4\theta$ の値を求めよ。また，$4\theta=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ とおくとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ を，ある関数 $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における定積分を用いて表し，この極限値を求めよ。

5 （下書き用紙）

6 次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において次の不等式を解け。

$$\sin x + \cos 2x \geqq 0$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\cos 2x$ および直線 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ が囲む図形の面積 S を求めよ。

(3) 上の図形の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

6 （下書き用紙）

7 円

$$C_1 : x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 4y + 3 = 0$$

と放物線

$$C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + 1$$

について，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と座標軸との共有点，および C_2 と座標軸との共有点の座標を求めよ。

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 4y + 3 \leqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}x + 1 \end{cases}$$

を満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

(3) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，$x + y$ の最大値を求めよ。

7 （下書き用紙）

$\boxed{8}$ 曲線 $y = \log x$ の接線は常にこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下，k は自然数とする。

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y = \log x$ との交点を A'_k とし，A'_k におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k \geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k - \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k + \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ B'_k，C'_k とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}'_k\mathrm{B}'_k$ の面積を求めよ，

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ。

ア） $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\, dx$ （ただし，$k \geqq 2$）

イ） $\dfrac{\log k + \log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \log x\, dx$ （ただし，$k \geqq 1$）

(3) $a_n = \log(n!) - \dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\, dx < a_n < \int_{1}^{n} \log x\, dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$\begin{cases} U_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\log n - n + \dfrac{3}{2}\left(1 - \log\dfrac{3}{2}\right) \\ V_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\log n - n + 1 \end{cases}$$

とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n < \log(n!) < V_n$$

8 （下書き用紙）