群馬大学

数学

問題

2014年度入試

【学部】　教育学部、社会情報学部、医学部、理工学部

【入試名】　前期日程

【試験日】　2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕　理工学部は **1** ～ **5**，医（医）学部は **1**，**5** ～ **8**，教育（数学・技術）学部は **1**，**3** ～ **5**，**9**，教育（数学・技術・理科）学部は **10**，**11**，社会情報学部は **1**，**2**，**3**，**5**，**9**

1 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 をそれぞれ1から9までの整数とし，a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 の中に同じ数がいくつあってもよいとする．$[a_1a_2a_3]$ は3桁(けた)の整数 $a_1\times100+a_2\times10+a_3\times1$ を表し，$[b_1b_2b_3]$ は3桁の整数 $b_1\times100+b_2\times10+b_3\times1$ を表し，$[b_1b_2b_3 26]$ は5桁の整数 $b_1\times10000+b_2\times1000+b_3\times100+2\times10+6\times1$ を表すとする．
p, q, r を次の条件とする．
p: $[a_1a_2a_3]-1$ は50で割り切れる．q: $[b_1b_2b_3 26]$ は $[a_1a_2a_3]$ の26倍である．r: $[b_1b_2b_3]$ は整数の2乗ではない．
このとき，以下の問いに答えよ．
(1) 命題「$q\Longrightarrow p$」が真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ．
(2) 条件 q を満たす組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ は何組あるか．
(3) 命題「$q\Longrightarrow r$」が真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ．

2 p を正の実数とする．放物線 $y=3x^2-px+1$ と x 軸で囲まれた図形の面積が $\dfrac{4}{27}$ であるとき，p の値を求めよ．

3 座標平面において，動点 $\mathrm{P}(x, y)$ は単位円 C 上の点 $\mathrm{Q}(1, 0)$ を出発し，C 上を反時計回りに1周する．弧PQの長さは，出発してからの時間に比例する．Pが1周するのに T 秒かかる．このとき，以下の問いに答えよ．
(1) 出発してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq T)$ の点 $\mathrm{P}(x, y)$ について x, y を t と T を用いて表せ．
(2) 出発してから t 秒後 $\left(0\leqq t\leqq \dfrac{T}{4}\right)$ の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して $z=2x^2+xy+y^2$ を考える．z の最大値と最小値を求めよ．また最大値，最小値をとるのは出発してから何秒後か T を用いて表せ．

4 曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(1, 0)$ における接線と y 軸の交点をQとする．Qを通り x 軸に平行な直線と曲線 $y=\log x$ の交点をRとする．ここで，対数は自然対数である．このとき，以下の問いに答えよ．
(1) 点Rの座標を求めよ．
(2) 線分PRと曲線 $y=\log x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

5 座標平面において，4直線 $y=2$, $y=-4$, $x=-3$, $x=5$ 上にそれぞれ点A，B，C，Dをとる．この4点を頂点とする四角形が $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$ となる正方形であるとき，点A，B，C，Dの座標を求めよ．

6 a, b は実数で $a>0$, $b>1$ とする．放物線 $y=ax^2+1$ と直線 $y=b$ との交点で第1象限にあるものを P_1 とし，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $y=b$ の交点で第1象限にあるものを P_2 とする．P_1 と P_2 の間の距離を d とするとき，以下の問いに答えよ．
(1) $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$d\leqq1$ であるための b の値の範囲を求めよ．
(2) $a\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$d\leqq1$ であるための b の値の範囲を a を用いて表せ．

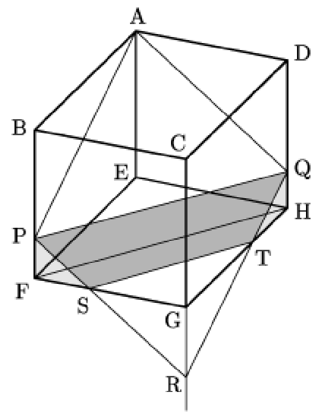
7 n を自然数とする．5832を底とする n の対数 $\log_{5832}n$ が有理数であり $\dfrac{1}{2}<\log_{5832}n<1$ を満たすとき，n を求めよ．

8 座標平面上の曲線 C は媒介変数 t $(t\geqq0)$ を用いて $x=t^2+2t+\log(t+1)$, $y=t^2+2t-\log(t+1)$ と表される．C 上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ における C の接線の傾きが $\dfrac{2e-1}{2e+1}$ であるとする．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．
(1) a と b の値を求めよ．
(2) Qを座標 (b, a) の点とする．直線PQ，直線 $y=x$ と曲線 C で囲まれた図形を，直線 $y=x$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ．

9 一辺の長さを 1 とする立方体 ABCD-EFGH があり，辺 BF 上に点 P と辺 DH 上に点 Q を $\mathrm{BP} = \mathrm{DQ} = \dfrac{3}{4}$ となるようにとる．点 A，P，Q を含む平面と直線 CG の交点を R とする．また直線 PR と辺 FG の交点を S とし，直線 QR と辺 GH の交点を T とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 四面体 SGTR の体積を求めよ．

(2) △PFS，△QTH，四角形 FSTH，四角形 PSTQ 及び四角形 PFHQ で囲まれた図形の体積を求めよ．



10 次の問いに答えよ．

(1) 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ は相異なる 3 つの実数解をもつことを示せ．

(2) $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解で最小のものを α，最大のものを β とする．このとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{\alpha}^{\beta} |x^2 - 1|\, dx$$

11 k を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ において，初めの k 項の和を T_1，次の k 項の和を T_2，その次の k 項の和を T_3 とし，以下同様に T_4，T_5，$\cdots$ を定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ が等比数列で $k = 4$ とする．$T_1 = 5$，$T_2 = 80$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，公比は実数とする．

(2) $\{a_n\}$ が等差数列ならば $\{T_n\}$ も等差数列であることを証明せよ．