

筑波大学 平成 30 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

- 社会・国際学群 (社会学類, 国際総合学類)
 人間学群 (教育学類, 心理学類, 障害科学類)
 生命環境学群 (生物学類, 生物資源学類, 地球学類)
 理工学群 (数学類, 物理学類, 化学類, 応用理工学類, 工学システム学類, 社会工学類)
 情報学群 (情報科学類, 情報メディア創成学類, 知識情報・図書館学類)
 医学群 (医学類, 医療科学類)

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 6 ページまでである。
2. 受験者は, 志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ, 解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。
 ※ ○印のついた問題は必ず解答し, △印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。
3. 解答用紙は問題に対応するものを使用すること。
4. 国際総合学類, 障害科学類および知識情報・図書館学類においては, 【選択 1】または【選択 2】の問題のいずれかを選択解答すること。

| 学 類 | 解答すべき問題 | | | | | | 備 考 | |
|------------|------------------------|---|-----|-----|---|---|--|----------------------|
| | 数学Ⅱ | | 数学B | 数学Ⅲ | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 社会学類 | △ | △ | ○ | | | | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 2 問を解答すること。 | |
| 国際総合学類 | 【選択 1】 【数学Ⅱ・数学B】選択者 | △ | △ | ○ | | | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 2 問を解答すること。 | |
| | 【選択 2】 【数学Ⅲ】選択者 | | | | △ | △ | △ | △印の中から 2 問を選択解答すること。 |
| 教育学類 | ○ | ○ | ○ | △ | △ | △ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 4 問を解答すること。 | |
| 心理学類 | ○ | ○ | ○ | △ | △ | △ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 4 問を解答すること。 | |
| 障害科学類 | 【選択 1】 【数学Ⅱ・数学B】選択者 | △ | △ | ○ | | | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 2 問を解答すること。 | |
| | 【選択 2】 【数学Ⅲ】選択者 | | | | △ | △ | △ | △印の中から 2 問を選択解答すること。 |
| 生物学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 生物資源学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 地球学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 数学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 物理学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 化学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 応用理工学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 工学システム学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 社会工学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 4 問を解答すること。 | |
| 情報科学類 | △ | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 情報メディア創成学類 | △ | △ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 知識情報・図書館学類 | 【選択 1】 | | △ | △ | △ | △ | △ | △印の中から 2 問を選択解答すること。 |
| | 【選択 2】 | △ | | △ | △ | △ | △ | △印の中から 2 問を選択解答すること。 |
| 医学類 | ○ | ○ | ○ | △ | △ | △ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |
| 医療科学類 | ○ | ○ | ○ | △ | △ | △ | ○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。 | |

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(\tan \theta, \tan^2 \theta)$, $B(-\tan \theta, \tan^2 \theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし、外心の y 座標を q とする。また、正の実数 a に対して、直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1) p, q を $\cos \theta$ を用いて表せ。

(2) $\frac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos \theta$ の値をすべて求めよ。

[2] 放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ が 2 直線 $l_1: y = px$ ($p > 0$), $l_2: y = qx$ ($q < 0$) と接している。また, C と l_1, l_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

(1) a, b を p, q を用いてそれぞれ表せ。

(2) S を p, q を用いて表せ。

(3) l_1, l_2 が直交するように p, q が動くとき, S の最小値を求めよ。

[3] 正三角形 OAB に対し、直線 OA 上の点 P_1, P_2, P_3, \dots および直線 OB 上の点 Q_1, Q_2, Q_3, \dots を、次の (I), (II), (III) を満たすようにとる。

(I) $P_1 = A$ である。

(II) 線分 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$ はすべて直線 OA に垂直である。

(III) 線分 $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが、整数 k, ℓ によって $k\vec{a} + \ell\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。 n を自然数とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) \vec{OP}_n と \vec{OQ}_n を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。

(2) $\vec{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 Q_nP_{n+1} 上にあるとき、 x を y を用いて表せ。また、線分 Q_nP_{n+1} 上にある S の点の個数を求めよ。

(3) 三角形 $OP_{n+1}Q_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。

[4] 2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} \quad (0 < x < \pi),$$

$$C_2 : y = \sqrt{2} (\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

[5] $f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ とし, $c \geq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$,
 $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また, $x \geq \pi$ のとき, $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して, $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi} |a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ。また, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

[6] 複素数 α に対して、複素数平面上の3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ を考える。

次の条件 (I), (II), (III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

(I) α は実数でも純虚数でもない。

(II) $|\alpha| > 1$ である。

(III) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) α が S に属するとき、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面に図示せよ。

(3) x, y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする。 α が S を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め、図示せよ。