

# 筑波大学 平成 29 年度 個別学力試験問題

## 数 学 (120 分)

- 社会・国際学群 (社会学類, 国際総合学類)  
 人間学群 (教育学類, 心理学類, 障害科学類)  
 生命環境学群 (生物学類, 生物資源学類, 地球学類)  
 理工学群 (数学類, 物理学類, 化学類, 応用理工学類, 工学システム学類, 社会工学類)  
 情報学群 (情報科学類, 情報メディア創成学類, 知識情報・図書館学類)  
 医学群 (医学類, 医療科学類)

### 注 意

- 1 問題冊子は1ページから6ページまでである。
- 2 受験者は, 志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ, 解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。  
 ※ ○印のついた問題は必ず解答し, △印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。
- 3 解答用紙は問題に対応するものを使用すること。
- 4 国際総合学類, 障害科学類および知識情報・図書館学類においては, 【選択1】または【選択2】の問題のいずれかを選択解答すること。

学 類	解答すべき問題						備 考	
	数学Ⅱ		数学B	数学Ⅲ				
	1	2	3	4	5	6		
社会学類	△	△	○				○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。	
国際総合学類	{選択1} [数学Ⅱ・数学B]選択者	△	△	○			○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。	
	{選択2} [数学Ⅲ]選択者				△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
教育学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。	
心理学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。	
障害科学類	{選択1} [数学Ⅱ・数学B]選択者	△	△	○			○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。	
	{選択2} [数学Ⅲ]選択者				△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
生物学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
生物資源学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
地球学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
数学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
物理学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
化学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
応用理工学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
工学システム学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
社会工学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。	
情報科学類	△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
情報メディア創成学類	△	△	○	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。	
知識情報・図書館学類	{選択1}		△	△	△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
	{選択2}	△		△	△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
医学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	
医療科学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。	

[1]  $a$  を正の実数とする。2つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは、2点 A, B で交わる。但し、A の  $x$  座標は B の  $x$  座標より小さいとする。また、2点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を  $l$  とする。

- (1) 2点 A, B の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 直線  $l$  の方程式を  $a$  を用いて表せ。
- (3) 原点と直線  $l$  の距離  $d$  を  $a$  を用いて表せ。また、 $a > 0$  の範囲で  $d$  を最大にする  $a$  の値を求めよ。

[2]  $a, b, c$  を実数とし,  $\beta, m$  をそれぞれ  $0 < \beta < 1, m > 0$  を満たす実数とする。また, 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  は  $x = \beta, -\beta$  で極値をとり,  $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$  を満たすとする。

(1)  $a, b, c$ , および  $\beta, m$  の値を求めよ。

(2) 関数  $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$  は,  $-1 \leq x \leq 1$  に対して  $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$  を満たすとする。  $h(x) = f(x) - g(x)$  とおくと,  $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$  それぞれと 0 との大きさを比較することにより,  $h(x)$  を求めよ。

[ 3 ] 数列  $\{a_n\}$  が

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとする。また,  $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$  とおく。以下の問いに答えよ。

(1)  $b_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$  を示せ。

(2)  $b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$  の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)  $a_{2017}$  の一の位の数を求めよ。

〔4〕 関数

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  の解をすべて求めよ。
- (2) 関数  $f(x)$  のすべての極値を求めよ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

[5]  $xy$  平面において、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。また、実数  $a$  に対して、 $a$  以下の最大の整数を  $[a]$  で表す。記号  $[ ]$  をガウス記号という。以下の問いでは  $N$  を自然数とする。

(1)  $n$  を  $0 \leq n \leq N$  を満たす整数とする。点  $(n, 0)$  と点  $\left(n, N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right)$  を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線  $y = x$  と、 $x$  軸、および直線  $x = N$  で囲まれた領域(境界を含む)にある格子点の個数を  $A(N)$  とおく。このとき  $A(N)$  を求めよ。

(3) 曲線  $y = N \sin\left(\frac{\pi x}{2N}\right)$  ( $0 \leq x \leq N$ ) と、 $x$  軸、および直線  $x = N$  で囲まれた領域(境界を含む)にある格子点の個数を  $B(N)$  とおく。(2) の  $A(N)$  に対して  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$  を求めよ。

[6]  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  とする。複素数平面上において、原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点  $P_1(w_1)$ ,  $P_2(w_2)$ ,  $P_3(w_3)$ ,  $P_4(w_4)$ ,  $P_5(w_5)$  が反時計まわりに並んでおり、次の 2 つの条件 (I), (II) を満たすとする。

(I)  $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$  が成り立つ。

(II)  $\frac{w_3}{w_2}$  と  $-\frac{w_4}{w_2}$  は方程式  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$  の解である。

また、五角形  $P_1P_2P_3P_4P_5$  の面積を  $S$  とする。以下の問いに答えよ。

(1) 五角形  $P_1P_2P_3P_4P_5$  の頂点  $P_1$  における内角  $\angle P_5P_1P_2$  を求めよ。

(2)  $S$  を  $a$  を用いて表せ。

(3)  $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$  とする。このとき、 $R^2 + 2S$  は  $a$  の値によらないことを示せ。