筑波大学　平成28年度　個別学力試験問題

数　　学　(120分)

社会・国際学群　(社会学類，国際総合学類)
人　間　学　群　(教育学類，心理学類，障害科学類)
生命環境学群　(生物学類，生物資源学類，地球学類)
理　工　学　群　(数学類，物理学類，化学類，応用理工学類，工学システム学類，社会工学類)
情　報　学　群　(情報科学類，情報メディア創成学類，知識情報・図書館学類)
医　　学　　群　(医学類，医療科学類)

注　　意

1　問題冊子は1ページから6ページまでである。

2　受験者は，志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ，解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※　○印のついた問題は必ず解答し，△印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

3　解答用紙は問題に対応するものを使用すること。

4　国際総合学類，障害科学類および知識情報・図書館学類においては，【選択1】または【選択2】の問題のいずれかを選択解答すること。

学類		解答すべき問題						備考
		数学Ⅱ		数学B	数学Ⅲ			
		1	2	3	4	5	6	
社会学類		△	△	○				○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
国際総合学類	〔選択1〕「数学Ⅱ・数学B」選択者	△	△	○				○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
	〔選択2〕「数学Ⅲ」選択者				△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
教育学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
心理学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
障害科学類	〔選択1〕「数学Ⅱ・数学B」選択者	△	△	○				○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
	〔選択2〕「数学Ⅲ」選択者				△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
生物学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類		△	△	△	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	△	○	○	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類	〔選択1〕		△	△	△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
	〔選択2〕	△		△	△	△	△	△印の中から2問を選択解答すること。
医学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

〔1〕 kを実数とする。xy平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点P，Qを持つとする。ただし点P，Qのx座標は正であるとする。また，原点をOとする。

(1) kのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) kが(1)の範囲を動くとき，△OPQの重心Gの軌跡を求めよ。

(3) △OPQの面積をSとするとき，S^2をkを用いて表せ。

(4) kが(1)の範囲を動くとする。△OPQの面積が最大となるようなkの値と，そのときの重心Gの座標を求めよ。

〔2〕 xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を ℓ とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の (i)〜(iv) で定める。

(i) 円 C_1 は直線 ℓ および x 軸の正の部分と接する。

(ii) 円 C_1 の中心は第1象限にあり，原点Oから中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii) 円 C_2 は直線 ℓ，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

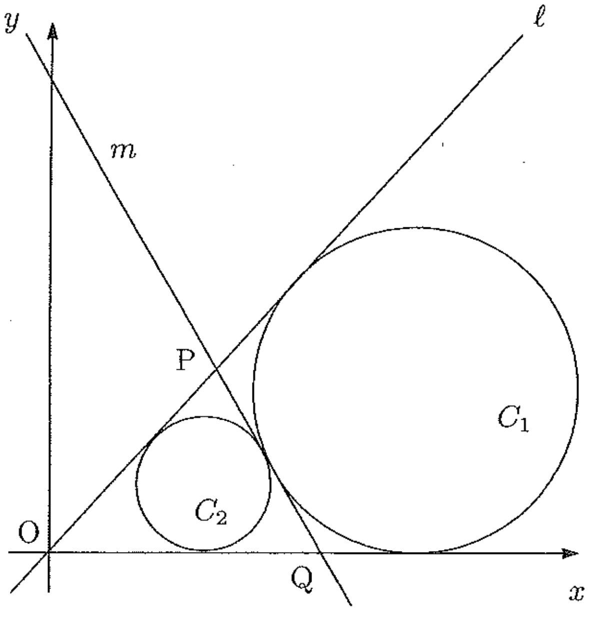
(iv) 円 C_2 の中心は第1象限にあり，原点Oから中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 ℓ と異なる直線を m とし，直線 m と直線 ℓ，x 軸との交点をそれぞれP，Qとする。

(1) 円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分PQの長さの最大値を求めよ。

(3) (2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。



◇M6(419—85)

〔3〕 四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく。このとき等式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$$

が成り立つとする。tは実数の定数で，$0<t<1$を満たすとする。線分OAを$t:1-t$に内分する点をPとし，線分BCを$t:1-t$に内分する点をQとする。また，線分PQの中点をMとする。

(1) $\overrightarrow{OM}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とtを用いて表せ。

(2) 線分OMと線分BMの長さが等しいとき，線分OBの長さを求めよ。

(3) 4点O，A，B，Cが点Mを中心とする同一球面上にあるとする。このとき，△OABと△OCBは合同であることを示せ。

〔4〕 関数$f(x)=2\sqrt{x}\,e^{-x}\,(x \geqq 0)$について次の問いに答えよ。

(1) $f'(a)=0$, $f''(b)=0$を満たすa, bを求め，$y=f(x)$のグラフの概形を描け。ただし，$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}=0$であることは証明なしで用いてよい。

(2) $k \geqq 0$のとき$V(k)=\int_0^k xe^{-2x}dx$をkを用いて表せ。

(3) (1)で求めたa, bに対して曲線$y=f(x)$とx軸および2直線$x=a$, $x=b$で囲まれた図形をx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

〔5〕 $\triangle$PQR において $\angle \mathrm{RPQ} = \theta$, $\angle \mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ とする。点 P_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) を次で定める。

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P},\ \mathrm{P}_2 = \mathrm{Q},\ \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 P_{n+2} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする。実数 θ_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) を

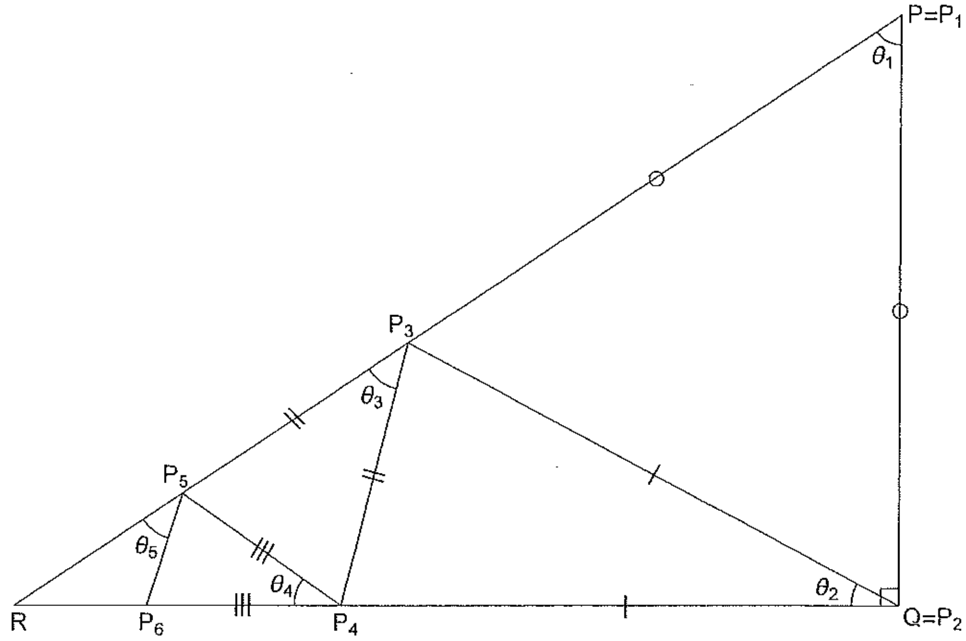
$$\theta_n = \angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2} \quad (0 < \theta_n < \pi)$$

で定める。

(1) θ_2, θ_3 を θ を用いて表せ。

(2) $\theta_{n+1} + \dfrac{\theta_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \theta_n$ を求めよ。



〔6〕 複素数平面上を動く点zを考える。次の問いに答えよ。

(1) 等式$|z-1|=|z+1|$を満たす点zの全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点zが原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$が描く図形は直線から1点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3) aを正の実数とする。点zが虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$が描く図形は円から1点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。