筑波大学　平成27年度　個別学力試験問題

数　　学　(120分)

社会・国際学群　(社会学類，国際総合学類)
人　間　学　群　(教育学類，心理学類，障害科学類)
生命環境学群　(生物学類，生物資源学類，地球学類)
理　工　学　群　(数学類，物理学類，化学類，応用理工学類，工学システム学類，社会工学類)
情　報　学　群　(情報科学類，情報メディア創成学類，知識情報・図書館学類)
医　　学　　群　(医学類，医療科学類)

注　　意

1　問題冊子は1ページから7ページまでである。

2　受験者は，志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ，解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※　○印のついた問題は必ず解答し，△印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

3　解答用紙は問題に対応するものを使用すること。

4　国際総合学類，障害科学類および工学システム学類においては【選択1】，【選択2】のいずれかを選択解答すること。

5　知識情報・図書館学類においては，【選択1】，【選択2】，【選択3】のいずれかを選択解答すること。

学類		解答すべき問題							備考
		数学Ⅱ		数学B	数学Ⅲ		新教育課程数学Ⅲ	旧数学C	
		1	2	3	4	5	6	7	
社会学類		△	△	○					○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
国際総合学類	【選択1】「数学Ⅱ・数学B」選択者	△	△	○					○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
	【選択2】「数学Ⅲ」選択者				△	△	□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教育学類		○	○	○	△	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
心理学類		○	○	○	△	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
障害科学類	【選択1】「数学Ⅱ・数学B」選択者	△	△	○					○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
	【選択2】「数学Ⅲ」選択者				○	○			○印の問題2問を解答すること。
生物学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類	【選択1】	△	△	△	○	○	△		○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
	【選択2】	△	△	△	○	○		△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	△	○	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類	【選択1】「数学Ⅱ・数学B」選択者	△	△	○					○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
	【選択2】「数学Ⅲ」選択者				△	△	△		△印の中から2問を選択解答すること。
	【選択3】「数学Ⅲ」選択者				△	△		△	△印の中から2問を選択解答すること。
医学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類		△	△	△	○	○	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問，□印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。

〔1〕 以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2+y \leqq 1 \\ x-y \leqq 1 \end{cases}$$

(2) 2つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3) x，y が (1) の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える x，y の値を求めよ。

〔2〕 半径1の円を内接円とする三角形ABCが，辺ABと辺ACの長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺BC，CA，ABと内接円の接点をそれぞれP，Q，Rとする。また，$\alpha = \angle\mathrm{CAB}$，$\beta = \angle\mathrm{ABC}$とし，三角形ABCの面積を$S$とする。

(1) 線分AQの長さをαを用いて表し，線分QCの長さをβを用いて表せ。

(2) $t = \tan\dfrac{\beta}{2}$とおく。このとき，Sをtを用いて表せ。

(3) 不等式$S \geqq 3\sqrt{3}$が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形ABCが正三角形のときに限ることを示せ。

〔3〕 p と q は正の整数とする。2次方程式 $x^2-2px-q=0$ の2つの実数解を α，β とする。ただし $\alpha>\beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める。ただし $\alpha^0=1$，$\beta^0=1$ と定める。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は整数であることを示せ。

(3) 自然数 n に対し，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。p と q が $q<2p+1$ を満たすとき，b_n を a_n を用いて表せ。

〔4〕 $f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ とおく。曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく。

(1) 次の等式を示せ。

$$b(t)=\frac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})$$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$\log(1+x) \leqq x$ であることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，

$$b(t) \leqq \frac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$$

であることを示せ。

(4) $b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}\,dt$ であることを示せ。

〔5〕 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$h(x)=\sin x$$

とおく。3つの曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$の$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$を満たす部分を，それぞれ$C_1$，$C_2$，$C_3$とする。

(1) C_2とC_3の交点の座標を求めよ。

(2) C_1とC_3の交点のx座標をαとする。$\sin\alpha$，$\cos\alpha$の値を求めよ。

(3) C_1，C_2，C_3によって囲まれる図形の面積を求めよ。

〔6〕 αを実数でない複素数とし，βを正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数wに対してその共役複素数を$\overline{w}$で表す。

(1) 複素数平面上で，関係式$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$を満たす複素数$z$の描く図形を$C$とする。このとき，$C$は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$が純虚数となる複素数$z$の描く図形を$L$とする。$L$は (1) で定めた$C$と2つの共有点をもつことを示せ。また，その2点をP，Qとするとき，線分PQの長さをαと$\overline{\alpha}$を用いて表せ。

(3) βの表す複素数平面上の点をRとする。(2) で定めた点P，Qと点Rを頂点とする三角形が正三角形であるとき，βをαと$\overline{\alpha}$を用いて表せ。

〔７〕 α，β は異なる２つの実数とする。座標平面において２点$(\alpha, 1)$，$(\beta, 1)$をそれぞれ点(α^2, α)，(β^2, β)に移す１次変換を表す行列をAとする。自然数nに対し，点$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。

(1) $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおくと$AQ = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$となることを示せ。

(2) 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 点P_2，P_3，P_4，$\cdots$がすべて直線$y = \dfrac{1}{2}x$上にあるようなα，βを１組求め，そのときの行列Aを求めよ。