筑波大学　　平成26年度　個別学力試験問題
前期

数　　学　(120分)

社会・国際学群　(社会学類，国際総合学類)
人　間　学　群　(教育学類，心理学類，障害科学類)
生命環境学群　(生物学類，生物資源学類，地球学類)
理　工　学　群　(数学類，物理学類，化学類，応用理工学類，工学システム学類，社会工学類)
情　報　学　群　(情報科学類，情報メディア創成学類，知識情報・図書館学類)
医　　学　　群　(医学類，医療科学類)

注　　意

1　問題冊子は1ページから6ページまでである。

2　受験者は，志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ，解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※　○印のついた問題は必ず解答し，△印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

3　解答用紙は問題に対応するものを使用すること。

4　国際総合学類においては，「数学Ⅱ・数学B」または「数学Ⅲ・数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

5　教育学類および障害科学類においては，「数学Ⅱ・数学B」，「数学Ⅲ」または「数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

学類		解答すべき問題						備考
		数学Ⅱ	数学Ⅲ		数学B	数学C		
		1	2	3	4	5	6	
社会学類		○			○			○印の問題2問を解答すること。
国際総合学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△		□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教育学類 障害科学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ」選択者		○	○				○印の問題2問を解答すること。
	「数学C」選択者					○	○	○印の問題2問を解答すること。
心理学類		○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計4問を解答すること。
生物学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類		△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類		△	△	△	□	□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
医学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

〔1〕 $f(x)=x^3-x$ とする。$y=f(x)$ のグラフに点 $P(a,\ b)$ から引いた接線は3本あるとする。3つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a，b を用いて表せ。

(2) 点 G の座標を a，b を用いて表せ。

(3) 点 G の x 座標が正で，y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。

〔2〕 xy 平面上の曲線 $C : y = x\sin x + \cos x - 1 \ (0 < x < \pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。ただし $3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

(1) 曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。

(2) 曲線 C と x 軸の交点を $A(\alpha,\ 0)$ とする。$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ。

(3) 曲線 C，y 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また，xy 平面の原点 O，点 A および曲線 C 上の点 $B\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。$S < T$ であることを示せ。

〔3〕 関数$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$を$x>0$で考える。$y=f(x)$のグラフの点$(a,\ f(a))$における接線をℓ_aとし，ℓ_aとy軸との交点を$(0,\ Y(a))$とする。以下の問いに答えよ。ただし，実数kに対して$\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$であることは証明なしで用いてよい。

(1) $Y(a)$がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $0<a<b$であるa，bに対して，ℓ_aとℓ_bがx軸上で交わるとき，aのとりうる値の範囲を求め，bをaで表せ。

(3) (2)のa，bに対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$とおく。$\displaystyle\lim_{a\to+0} Z(a)$および$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}$を求めよ。

〔4〕 平面上の直線 ℓ に同じ側で接する2つの円 C_1, C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。ℓ, C_1, C_2 で囲まれた領域内に，これら3つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に ℓ, C_n, C_{n+1} $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら3つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$r_1 = 16$, $r_2 = 9$ とする。

(1) ℓ が C_1, C_2, C_3 と接する点を，それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく。線分 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 の長さおよび r_3 の値を求めよ。

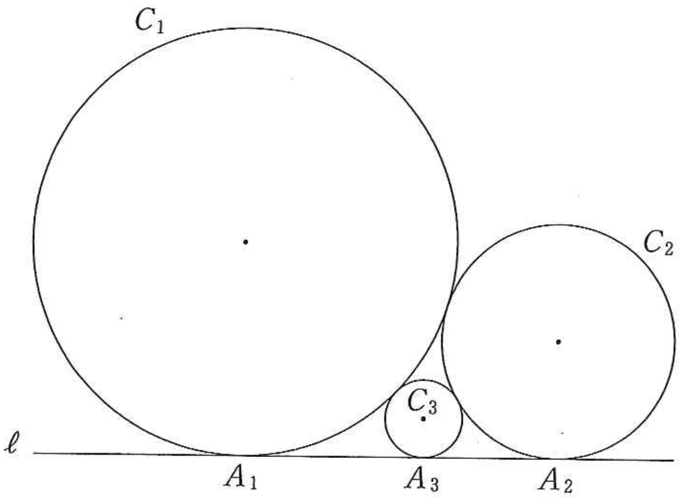
(2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ となることを示せ。a, b の値も求めよ。

(3) (2)で求めた a, b に対して，2次方程式 $t^2 = at + b$ の解を α, β $(\alpha > \beta)$ とする。$x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4) (3)の c, d, α, β に対して，

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α, β を用いて表せ。



◇M6(884—83)

〔5〕 実数を成分とする正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $AB=BA$ を満たす A は，実数 x，y を用いて $A=xB+yE$ と表せることを示せ。

(2) $A^3=E$ のとき

$$(t^2-\varDelta)A=(t\varDelta+1)E$$

を示せ。ただし，$t=a+d$，$\varDelta=ad-bc$ とする。

(3) $AB=BA$ かつ $A^3=E$ を満たす A をすべて求めよ。

〔6〕 xy 平面上に楕円

$$C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \ (a > \sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (b > 0)$$

があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点

$P\left(2\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t > 0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする。

(1) a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) ℓ_1 と ℓ_2 が直交することを示せ。

(3) a が $a > \sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。