筑波大学　平成25年度　個別学力試験問題

前期　数　学（120分）

社会・国際学群（社会学類，国際総合学類）
人間学群（教育学類，心理学類，障害科学類）
生命環境学群（生物学類，生物資源学類，地球学類）
理工学群（数学類，物理学類，化学類，応用理工学類，工学システム学類，社会工学類）
情報学群（情報科学類，情報メディア創成学類，知識情報・図書館学類）
医学群（医学類，医療科学類）

注　意

1　問題冊子は1ページから6ページまでである。

2　受験者は，志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ，解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※　○印のついた問題は必ず解答し，△印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

3　解答用紙は問題に対応するものを使用すること。

4　国際総合学類においては，「数学Ⅱ・数学B」または「数学Ⅲ・数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

5　教育学類および障害科学類においては，「数学Ⅱ・数学B」，「数学Ⅲ」または「数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

学類		解答すべき問題						備考
		数学Ⅱ	数学Ⅲ		数学B	数学C		
		1	2	3	4	5	6	
社会学類		○			○			○印の問題2問を解答すること。
国際総合学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△		□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教育学類 障害科学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ」選択者		○	○				○印の問題2問を解答すること。
	「数学C」選択者					○	○	○印の問題2問を解答すること。
心理学類		○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計4問を解答すること。
生物学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類		△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類		△	△	△	□	□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
医学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

〔1〕 $f(x)$, $g(t)$を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく。

(1) $2g(t) - 1 = f(2\cos t)$が成り立つことを示せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{7}$のとき，$2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$は3次方程式 $f(x) = 0$の解であることを示せ。

〔2〕 n は自然数とする。

(1) $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \ \cos t \ dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 媒介変数 t によって

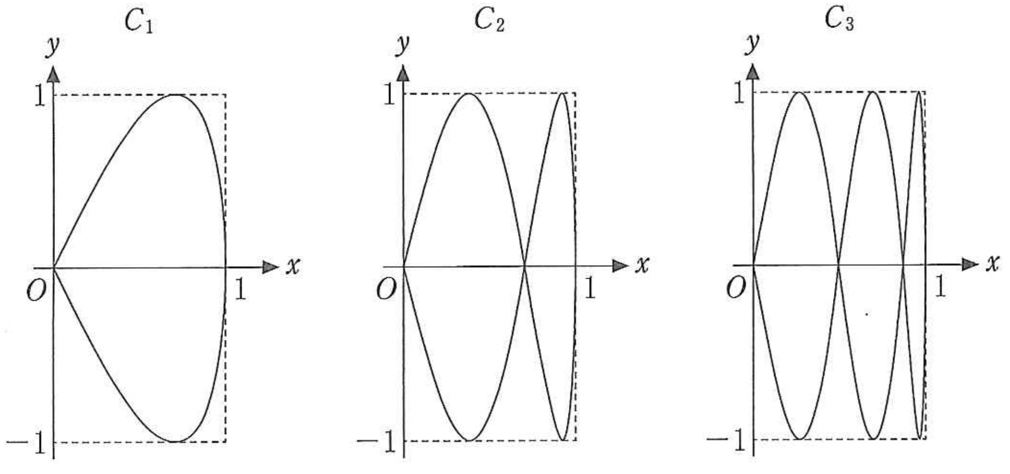
$$x = \sin t, \ \ y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。



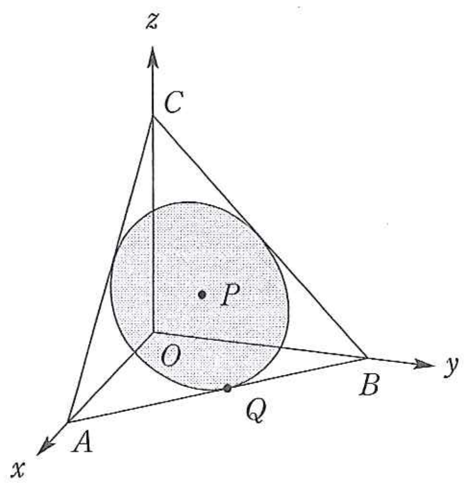
〔3〕 xyz 空間において，点 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$ を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする。

(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2) 円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3) 円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



◇M6(436—83)

〔4〕 3つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_{n+1} = -c_n - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$c_{n+1} = -a_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

および$a_1 = a$，$b_1 = b$，$c_1 = c$を満たすとする。ただし，a，b，cは定数とする。

(1) $p_n = a_n + b_n + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

で与えられる数列$\{p_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $q_n = (-1)^n\{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

で与えられる数列$\{q_n\}$の初項から第$2n$項までの和をT_nとする。$a + b + c$が奇数であれば，すべての自然数nに対してT_nが正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

〔5〕 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし，a，b，c，d は実数とする。

(1) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた A のそれぞれについて $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}$ を求めよ。

〔6〕 楕円 $C: \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を ℓ_1，ℓ_1' とし，ℓ_1，ℓ_1' に直交する C の 2 接線を ℓ_2，ℓ_2' とする。

(1) ℓ_1，ℓ_1' の方程式を m を用いて表せ。

(2) ℓ_1 と ℓ_1' の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。
ただし，平行な 2 直線 ℓ，ℓ' の距離とは，ℓ 上の 1 点と直線 ℓ' の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) ℓ_1，ℓ_1'，ℓ_2，ℓ_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。
さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。