平成24年度　個別学力試験問題

筑波大学　前期　数　　学　（120分）

社会・国際学群　（社会学類，国際総合学類）
人　間　学　群　（教育学類，心理学類，障害科学類）
生命環境学群　（生物学類，生物資源学類，地球学類）
理　工　学　群　（数学類，物理学類，化学類，応用理工学類，工学システム学類，社会工学類）
情　報　学　群　（情報科学類，情報メディア創成学類，知識情報・図書館学類）
医　　学　　群　（医学類，医療科学類）

注　　意

1　問題冊子は1ページから6ページまでである。

2　受験者は，志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ，解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※　○印のついた問題は必ず解答し，△印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

3　解答用紙は問題に対応するものを使用すること。

4　国際総合学類においては，「数学Ⅱ・数学B」または「数学Ⅲ・数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

5　教育学類および障害科学類においては，「数学Ⅱ・数学B」，「数学Ⅲ」または「数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

学類		解答すべき問題						備考
		数学Ⅱ	数学Ⅲ		数学B	数学C		
		1	2	3	4	5	6	
社会学類		○			○			○印の問題2問を解答すること。
国際総合学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△		□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教育学類 障害科学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ」選択者		○	○				○印の問題2問を解答すること。
	「数学C」選択者					○	○	○印の問題2問を解答すること。
心理学類		○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計4問を解答すること。
生物学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類		△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類		△	△	△	□	□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
医学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

〔1〕 x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$ (p, q は実数)が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする。

(I) 3 つの解の比は，1 : 2 : 3 である。

(II) 3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい。

このとき，$A = \log_{10} 2$，$B = \log_{10} 3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ。

〔2〕 曲線 $C : y = \dfrac{1}{x+2}$ $(x > -2)$ を考える。曲線 C 上の点 $P_1\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 とし，ℓ_1 と x 軸との交点を Q_1，点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく。以下同様に，自然数 $n\,(n \geqq 2)$ に対して，点 P_n における接線を ℓ_n とし，ℓ_n と x 軸との交点を Q_n，点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく。

(1) ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2) P_n の x 座標を $x_n\,(n \geqq 1)$ とする。x_{n+1} を x_n を用いて表し，x_n を n を用いて表せ。

(3) ℓ_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め，$\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。

〔3〕 曲線C：$y=\log x$ ($x>0$)を考える。自然数nに対して，曲線C上に点$P(e^n, n)$，$Q(e^{2n}, 2n)$をとり，x軸上に点$A(e^n, 0)$，$B(e^{2n}, 0)$をとる。四角形$APQB$をx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を$V(n)$とする。また，線分PQと曲線Cで囲まれる部分をx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を$S(n)$とする。

(1) $V(n)$をnの式で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$を求めよ。

〔4〕 四面体 $OABC$ において，次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

(2) 点 H は $\triangle ABC$ の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ を示せ。

(3) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$ とする。このとき，$\triangle ABC$ の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。

〔5〕 以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面において原点のまわりに角 $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ だけ回転する移動を表す行列を A とする。A が等式 $A^2 - A + E = O$ を満たすとき，θ と A を求めよ。ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(2) 直線 $y = \sqrt{3}\,x$ に関する対称移動を表す行列 B を求めよ。

(3) 直線 $y = kx$ に関する対称移動を表す行列 C とする。(1)，(2)において求めた行列 A，B に対して $BC = A$ が成り立つとき，k を求めよ。

〔6〕 2つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $H: x^2 - y^2 = -1$ を考える。双曲線 H 上の点 $P(s, t)$ に対して，方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ は点 P を通らないことを示せ。

(2) 直線 ℓ と双曲線 C は異なる2点 Q, R で交わることを示し，$\triangle PQR$ の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3) (2)における3点 G, Q, R に対して，$\triangle GQR$ の面積は点 $P(s, t)$ の位置によらず一定であることを示せ。