筑波大学一般前期

平成 23 年度　個別学力試験問題

数　　学　(120 分)

社会・国際学群　(社会学類, 国際総合学類)
人　間　学　群　(教育学類, 心理学類, 障害科学類)
生命環境学群　(生物学類, 生物資源学類, 地球学類)
理　工　学　群　(数学類, 物理学類, 化学類, 応用理工学類, 工学システム学類, 社会工学類)
情　報　学　群　(情報科学類, 情報メディア創成学類, 知識情報・図書館学類)
医　　学　　群　(医学類, 医療科学類)

注　　意

1　問題冊子は 1 ページから 6 ページまでである。

2　受験者は, 志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ, 解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※　○印のついた問題は必ず解答し, △印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

3　解答用紙は問題に対応するものを使用すること。

4　国際総合学類においては, 「数学Ⅱ・数学B」または「数学Ⅲ・数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

5　教育学類および障害科学類においては, 「数学Ⅱ・数学B」, 「数学Ⅲ」または「数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

学類		解答すべき問題						備考
		数学Ⅱ	数学Ⅲ		数学B	数学C		
		1	2	3	4	5	6	
社会学類		○			○			○印の問題 2 問を解答すること。
国際総合学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題 2 問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△		□	□	△印の中から 1 問, □印の中から 1 問を選択解答。計 2 問を解答すること。
教育学類 障害科学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題 2 問を解答すること。
	「数学Ⅲ」選択者		○	○				○印の問題 2 問を解答すること。
	「数学C」選択者					○	○	○印の問題 2 問を解答すること。
心理学類		○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 4 問を解答すること。
生物学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
生物資源学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
地球学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
数学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
物理学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
化学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
応用理工学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 4 問を解答すること。
工学システム学類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 4 問を解答すること。
社会工学類		△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問, □印の中から 1 問を選択解答。計 4 問を解答すること。
情報科学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から 1 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
知識情報・図書館学類		△	△	△	□	□	□	△印の中から 1 問, □印の中から 1 問を選択解答。計 2 問を解答すること。
医学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。
医療科学類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から 2 問を選択解答。計 5 問を解答すること。

〔１〕 O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1) C 上に点 $A(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2) 点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。

〔2〕 自然数 n に対し，関数

$$F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n}\,dt \quad (x \geqq 0)$$

を考える。

(1) 関数 $F_n(x)$ $(x \geqq 0)$ はただ一つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。

(2) (1)で求めた a_n に対し，極限値 $\lim_{n \to \infty} \log a_n$ を求めよ。

〔3〕 α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $\ell: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2) 等式

$$2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq (\tan\alpha)x-\sin\alpha \\ x^2+(y+\sin\alpha)^2 \leqq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔4〕 数列$\{a_n\}$を,

$$a_1 = 1,$$
$$(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 等式

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つように，定数p, q, rの値を定めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$を$n$の式で表せ。

〔5〕 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の2点 $P(x,\ y)$, $Q(u,\ v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，行列 A により点 P は点 Q に移るという。

点$(1,\ 3)$は行列 A により点$(10,\ 10)$に移り，さらに等式

$$A^2-7A+10E=O$$

が成り立つものとする。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A により点$(10,\ 10)$が移る点の座標を求めよ。

(2) 実数 a，b，c，d の値を求めよ。

(3) 次の条件(＊)を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ。

(＊) 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る。

〔6〕 dを正の定数とする。2点$A(-d,\ 0)$, $B(d,\ 0)$からの距離の和が$4d$である点Pの軌跡として定まる楕円Eを考える。点A, 点B, 原点Oから楕円E上の点Pまでの距離をそれぞれAP, BP, OPと書く。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 楕円Eの長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) AP^2+BP^2および$AP\cdot BP$を，OPとdを用いて表せ。

(3) 点Pが楕円E全体を動くとき，AP^3+BP^3の最大値と最小値をdを用いて表せ。